

Hilberträume mit reproduzierendem Kern und
die Methode der Bergmanschen Kernfunktion
zur Approximation der konformen
Kreisabbildung

Diplomarbeit

am

Institut für Angewandte Mathematik und Statistik
der Bayerischen Julius - Maximilians - Universität
Würzburg

vorgelegt von

Gerhard Döppert

Würzburg, 1. Oktober 1991

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I Grundlagen	2
1 Funktionenräume mit stetigen Einsetzungsfunktionalen	3
2 Hilberträume mit reproduzierendem Kern	8
3 Operatoren und Teilräume in HmrK	13
4 Interpolation	16
5 Hilberträume als Wertebereich	20
II Räume integrierbarer holomorpher Funktionen	22
6 Die Räume L^p	23
7 Die Bergmansche Kernfunktion	25
8 Weitere Räume holomorpher Funktionen	31
8.1 Die Szegösche Kernfunktion	31
8.2 Hardy-Lebesgue-Räume	31
8.3 Vektorwertige holomorphe Abbildungen	32
8.4 Holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlicher	32
9 Approximation in L^2_B	34
III Die konforme Kreisabbildung	40
10 Exkurs: Eigenschaften konformer Abbildungen	41
11 Die Methode der Bergmanschen Kernfunktion	45
12 Approximation mit Polynomen	51
13 Die Methode von Papamichael et al.	58
14 Zusatz: Die Methode der Orthogonalentwicklung	62
15 Anwendung: Numerische Lösung elliptischer Randwertaufgaben bei krummlinig berandeten Gebieten	66

A Implementation der Algorithmen	70
B Programmtexte	73
Bezeichnungen	82

Die Themenstellung und Betreuung erfolgte durch Prof. Dr. W. Velte, dem ich an dieser Stelle für seine Anleitung recht herzlich danke. Mein Dank gilt auch Herrn Dr. G. Dengler für seine Hinweise und Anregungen. Die praktischen Arbeiten wurden am Rechenzentrum der Universität Würzburg durchgeführt.

Einleitung

Ein Hauptgegenstand dieser Arbeit sind topologische Vektorräume (insbesondere Hilberträume), deren Elemente Funktionen über einer gemeinsamen Definitionsmenge Ω sind. Die Auswertung der Funktionen an beliebigen festen Stellen $x \in \Omega$ soll durch stetige lineare Funktionale $e_x : f \mapsto f(x)$ beschrieben werden. Während im allgemeinen nur die lineare Struktur mit der Funktionenraumstruktur verträglich ist, hat man hier zusätzlich eine enge Verbindung zur Topologie. Daraus ergeben sich weitreichende Konsequenzen, von denen nur ein kleiner Ausschnitt aufgeführt werden kann.

Im ersten Teil sollen elementare funktionalanalytische Resultate im Vordergrund stehen. Typischerweise geht es dabei um die Verbindung von topologischen Konvergenz- und Beschränktheitsaussagen mit deren „punktweisen“ Entsprechungen, um Teilräume und Operatoren, sowie um damit zusammenhängende Interpolations- und Approximationseigenschaften.

In Hilberträumen werden die stetigen „Einsetzungsfunktionale“ e_x durch Elemente desselben Raums, d.h. durch gewisse Funktionen $K_x(\cdot)$ repräsentiert. Dies führt zu der von STEFAN BERGMAN ursprünglich für den Raum L_B^2 der quadratisch integrierbaren holomorphen Funktionen eingeführten *reproduzierenden Kernfunktion* $k(x, y) = K_x(y)$. Die Auswertung einer Funktion $f \in L_B^2$ an einer Stelle z des Definitionsbereichs Ω läßt sich durch ein Gebietsintegral mit dem Integralkern $k(\cdot, \cdot)$ darstellen:

$$f(z) = \int_{\Omega} f(w) \overline{k(z, w)} dw.$$

Vor allem um diesen Raum, um seine Kernfunktion und um Approximationsaussagen geht es im zweiten Teil. Dabei wird sich ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der Kernfunktion und der konformen Abbildung eines einfach zusammenhängenden Gebiets Ω auf den Einheitskreis ergeben. Diese schon in frühen Arbeiten von BERGMAN angegebene Beziehung läßt sich numerisch verwerten. In neueren Arbeiten haben PAPAMICHAEL und andere Autoren die Praktikabilität und das Einsatzgebiet der BERGMANSchen Methode zur Konstruktion der konformen Kreisabbildung wesentlich erweitert.

Diese erweiterte Version steht im Mittelpunkt des dritten Teils. Weiter soll noch kurz eine verwandte Methode vorgestellt werden, die sich auch zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete auf Kreisringe mit Schlitz einsetzen läßt. Den Abschluß bildet die Anwendung der konformen Kreisabbildung auf die Lösung elliptischer Randwertprobleme bei krummlinig berandeten Gebieten.

Natürlich ist das Thema damit nicht erschöpfend behandelt. Wichtige Bereiche mußten ausgespart bleiben oder werden möglicherweise allzu verkürzt dargestellt. Dabei handelt es sich vor allem um reelle Vertreter der genannten Klasse von Funktionenräumen, wie sie etwa im Zusammenhang mit Lösungsräumen elliptischer Differentialgleichungen auftreten. Hier sei auf die einschlägige Literatur (etwa BERGMAN [Bm] und dortige Referenzen) verwiesen.

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Funktionsräume mit stetigen Einsetzungsfunktionalen

Wir bezeichnen mit \mathbb{IK} im folgenden immer einen der beiden Skalarenkörper \mathbb{C} oder \mathbb{R} .

Definition 1 Sei $(W, |\cdot|)$ ein Banachraum über \mathbb{IK} , Ω eine Menge. $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega, W)$ sei der Raum W^Ω der Abbildungen von Ω nach W mit der linearen Produktstruktur $(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$, $x \in \Omega$, $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{IK}$, und der Produkttopologie $\tau_p(\mathcal{F})$.

Die Topologie $\tau_p(\mathcal{F})$ ist eine lineare Topologie und initial bezüglich der linearen „Einsetzoperatoren“ $x' : f \mapsto f(x)$, $x \in \Omega$. Sie wird von den Halbnormen $p_x(f) := |f(x)|$ erzeugt und hat eine konvexe 0-Subbasis $U(\varepsilon; x) = \{f \in \mathcal{F} : |f(x)| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, $x \in \Omega$. $\tau_p(\mathcal{F})$ ist hausdorffsch. Die Konvergenz in $\tau_p(\mathcal{F})$ ist die punktweise Konvergenz einer Folge von Abbildungen in \mathcal{F} . Als Produkttopologie vollständiger Räume ist $\tau_p(\mathcal{F})$ vollständig. Für abzählbares Ω ist $\tau_p(\mathcal{F})$ translationsinvariant metrisierbar. Wir wollen vor allem den einfachen Fall $W = \mathbb{IK}$ betrachten. Die meisten Ergebnisse dieses Paragraphen gelten auch für Banachräume W über \mathbb{IK} —ja teilweise sogar für normierte Räume. In Kapitel 5 werden einige Resultate der folgenden Paragraphen auf die Situation verallgemeinert, daß W ein Hilbertraum ist.

Definition 2 Der \mathbb{IK} -Vektorraum E sei mit dem injektiven linearen Operator $e : E \rightarrow \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{IK})$ versehen. Dann heißt E ein linearer Funktionenraum über \mathbb{IK} . Für $f \in E$ schreibt man $f(x) := (ef)(x)$, $e_x := x' \circ e$ heißt Einsetz- oder Auswertungsfunktional bei $x \in \Omega$.

Lemma 1 Sei $E = (E, \tau(E))$ ein topologischer Funktionenraum. e ist genau dann stetig, wenn alle e_x , $x \in \Omega$, stetig sind.

Beweis: Da \mathcal{F} mit der initialen Topologie bezüglich der x' ausgestattet ist, folgt die Behauptung sofort aus dem Satz vom Heben der Stetigkeit durch die initiale Topologie:

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{e} & \mathcal{F} \\
 & \searrow & \uparrow \\
 & & W = \mathbb{IK} \\
 & \swarrow & \downarrow x', x \in \Omega \\
 e_x = & & \\
 x' \circ e & &
 \end{array}$$

□

Der Operator e und das System der linearen Einsetzungsfunktionale $\{e_x, x \in \Omega\}$ erzeugen somit als initiale Topologie auf E beide die gleiche Topologie $\tau_p(E)$ der punktweisen Konvergenz von Funktionenfolgen.

Eine Teilmenge $\Omega_0 \subset \Omega$ heißt *Eindeutigkeitsbereich* für E , falls aus $f(x) = 0$ für alle $x \in \Omega_0$ stets $f = 0$ folgt. Ω selbst ist wegen der vorausgesetzten Injektivität von e immer ein Eindeutigkeitsbereich. Sei weiter $\Omega'_0 := \{e_x : x \in \Omega_0\}$. Für einen Eindeutigkeitsbereich Ω_0 ist Ω'_0 eine trennende Menge von linearen Funktionalen auf E , d.h. die Topologie der punktweisen Konvergenz auf einem Eindeutigkeitsbereich ist stets hausdorffsch.

Definition 3 Sei E ein topologischer Funktionenraum und $\Omega' \subset E'$, d.h. Ω' liegt im topologischen Dualraum von E . Ein solcher Funktionenraum $E (= (E, \Omega'))$ heißt Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen (kurz FmsE).

Eine Funktionalmenge $F' \subset E'$ heißt *vollständig* in E' , wenn $E' = \overline{\text{span } F'}$ gilt. Da nach dem Satz von Hahn-Banach jeder lokalkonvexe Raum eine trennende Menge von stetigen linearen Funktionalen besitzt, kann jeder solche Raum — nach Indizierung der Funktionale über einer genügend großen Menge Ω — als Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen aufgefaßt werden. Die Klasse der Funktionenräume mit stetigen Einsetzungsfunktionalen ist „genügend groß“.

Beispiel 1 Ein (fast trivialer) Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen ist der Raum $C(\Omega)$ der beschränkten stetigen Funktionen mit der Supremumnorm $\|f\| := \sup\{|f(x)|, x \in \Omega\}$. Die starke Topologie ist hier die der gleichmäßigen Konvergenz.

Im allgemeinen ist Ω' zwar trennende Menge, braucht aber nicht vollständig zu sein. Es gilt jedoch folgender

Satz 1 Sei E ein reflexiver Banachscher Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen. $\Omega_0 \subset \Omega$ ist genau dann Eindeutigkeitsbereich für E , wenn Ω'_0 vollständig ist. Existiert ein abzählbarer Eindeutigkeitsbereich, so sind E' und E separabel.

Beweis: $A := \overline{\text{span } \Omega'_0}$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von E' . Gibt es ein $\ell \in E' \setminus A$, dann gibt es auch ein $f \in E''$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f(\ell) = 1$, d.h. $f \neq 0$ (Satz von Hahn-Banach). Faßt man f als Element von E auf, so gilt $f|_{\Omega_0} \equiv 0$. Ω_0 kann kein Eindeutigkeitsbereich für E sein. Ist umgekehrt Ω_0 kein Eindeutigkeitsbereich, d.h. $f|_{\Omega_0} \equiv 0$ für ein $f \in E \setminus 0$, so gibt es wieder nach dem Satz von Hahn-Banach ein $\ell \in E'$ mit $\ell(f) = 1$ und damit $\ell \notin \overline{\text{span } \Omega'_0} \neq E'$. Weiterhin folgt in normierten Räumen aus der Separabilität des topologischen Dualraums die Separabilität des Raums selbst. \square

Da in einem Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen die schwache Konvergenz stets die punktweise Konvergenz impliziert, besteht zwischen der starken Topologie τ , der schwachen Topologie τ_w und der Topologie der punktweisen Konvergenz τ_p die Inklusion:

$$\tau_p \subset \tau_w \subset \tau.$$

Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht, man hat aber:

Korollar 1 In einem reflexiven Banachschen Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen ist jede beschränkte punktweise konvergente Folge schwach konvergent. Ist E ein Hilbertraum und konvergiert zusätzlich die Folge der Normen der Funktionen gegen die Norm der Grenzfunktion, so konvergiert die Folge der Funktionen stark.

Beweis: Nach Satz 1 ist Ω' vollständig, also folgt die erste Behauptung aus dem Satz von Banach-Steinhaus. Die zweite Behauptung bekommt man dann aus einem bekannten Satz über Hilberträume. \square

Beschränkte Folgen besitzen in reflexiven Banachräumen stets schwach konvergente Teilfolgen. Hieraus folgt das

Korollar 2 In einem reflexiven Banachschen Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen hat jede beschränkte Folge eine punktweise konvergente Teilfolge.

Wir treffen folgende **Vereinbarung**:

Für Funktionenräume bedeute $E_1 \sqsubset E$ neben der topologischen und linearen Inklusion auch, daß die Einsetzungsfunktionale auf E_1 Einschränkungen von denjenigen auf E sind. Für Homomorphismen $h : E_1 \rightarrow E$ mit $(hf)(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$ schreiben wir auch $h : E_1 \rightsquigarrow E$.

Proposition 1 Sei $E_1 \sqsubset E$. Dann sind die Eindeutigkeitsbereiche von E auch Eindeutigkeitsbereiche von E_1 . Mit E ist auch E_1 ein Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen. Dies gilt auch, wenn E_1 in E stetig eingebettet ist.

Beispiel 2 Alle in $C(\Omega)$ stetig eingebetteten Funktionenräume besitzen stetige Einsetzungsfunktionale. Dies trifft beispielsweise auf gewisse Sobolevräume (nach Wahl stetiger Repräsentanten) zu. Auch die Räume $C_\alpha^p(\Omega)$ (p -te Ableitung erfüllt Hölderbedingung der Ordnung $\alpha \in (0, 1]$) sind FmsE. Die auf einem beschränkten Gebiet harmonischen Funktionen mit stetigen Randwerten bilden mit dem Supremum des Betrags der Randwerte als Norm einen FmsE, ebenso wie die holomorphen Funktionen.

Sei $F \subset E$ ein abgeschlossener Teilraum des topologischen Funktionenraums E . $\hat{E} = E/F$ wird dann auf kanonische Weise zu einem (hausdorffschen) topologischen Vektorraum. Von „verträglichen“ Einsetzungsfunktionalen auf \hat{E} würde man fordern

$$\left. \begin{array}{l} \hat{f} \mapsto \hat{f}(x) \text{ ist linear auf } \hat{E} \text{ für jedes } x \in \Omega, \\ \hat{f}(x) = f(x) \text{ für einen festen Repräsentanten } f \in \hat{f} \text{ und alle } x \in \Omega. \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

Solche verträglichen Einsetzungsfunktionale existieren stets, sind aber i.a. nicht eindeutig bestimmt: Der Vektorraum \hat{E} besitzt eine lineare Basis B . Für jedes $\hat{f} \in B$ wähle man einen Repräsentanten $f \in \hat{f}$ und setze $\hat{f}(x) := f(x)$ für alle $x \in \Omega$. Die lineare Fortsetzung auf ganz \hat{E} ergibt Einsetzungsfunktionale, die die beiden obigen Bedingungen erfüllen.

Proposition 2 Sei E ein topologischer Vektorraum mit einer über der Menge Ω indizierten Familie $\Omega' = \{e_x : x \in \Omega\} \subset E'$ von stetigen linearen Funktionalen, $N = \Omega'^{\perp} \subset E$. Dann wird $\hat{E} = E/N$ zu einem Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen $\hat{f} \mapsto \hat{f}(x) := e_x(f)$ für ein (und damit jedes) $f \in \hat{f}$.

Beweis: Der Operator $e : E \rightarrow \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$, $f \mapsto f(\cdot)$ mit $f(x) := e_x(f)$ ist nach Lemma 1 stetig, da die e_x stetig sind. $N = \{f : f(x) = 0, x \in \Omega\} = \ker e$ ist ein abgeschlossener Teilraum. Die kanonische Injektion $\hat{e} : \hat{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ist stetig und injektiv, also ist \hat{E} ein Funktionenraum mit (den oben angegebenen) stetigen Einsetzungsfunktionalen über Ω . \square

Ist insbesondere E bereits ein FmsE über Ω und $\Omega_0 \subset \Omega$, so bekommt man mit $N = \Omega_0^{\perp}$ einen FmsE $\hat{E} = E/N$, welcher gerade aus den Einschränkungen der Funktionen in E auf die Teilmenge Ω_0 besteht.

Proposition 3 Sind E_1 und E_2 Funktionenräume mit stetigen Einsetzungsfunktionalen über der Menge Ω , $E = E_1 \times E_2$ und $N = \{(f_1, f_2) \in E : f_1(x) + f_2(x) \equiv 0 \text{ in } \Omega\}$. Dann ist $\hat{E} := E/N$ mit den Einsetzungsfunktionalen $f = (f_1, f_2) \mapsto f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ein FmsE über Ω .

Beweis: Der Operator $\tilde{e} : (f_1, f_2) \mapsto (f_1(\cdot), f_2(\cdot)) \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})^2$ ist stetig, ebenso die Addition in $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$. Folglich erfüllt die kanonische Injektion der Zusammensetzung die Forderungen eines FmsE. \square

In einem normierten Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen E nennen wir die Funktion $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $\kappa(x) := \|e_x\|^2 = \sup\{|f(x)|^2, \|f\| = 1\}$, die *Schrankenfunktion* von E .

Proposition 4 Sei E ein normierter Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen. Dann gilt für alle $x \in \Omega$ und $f \in E$:

$$|f(x)|^2 \leq \kappa(x) \|f\|^2. \quad (1.2)$$

Eine Cauchyfolge in E (und insbesondere eine normkonvergente Folge) konvergiert punktweise in jeder Teilmenge von Ω gleichmäßig, in der $\kappa(x)$ beschränkt ist. Falls κ für ein $x \in \Omega$ verschwindet, so verschwinden bei x alle $f \in E$. Ist $E_1 \subset E$ ein Teilraum mit der Schrankenfunktion κ_1 , so gilt $\kappa_1(x) \leq \kappa(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Beweis: Die erste Aussage ist trivial. Sei f_n eine Cauchyfolge und $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ für $n, m > n_0(\varepsilon)$. Wegen $|f_n(x) - f_m(x)|^2 < \varepsilon^2 \kappa(x)$ konvergiert sie punktweise gegen eine (nicht notwendig in E enthaltene) Funktion f und man hat $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < 2\varepsilon \sqrt{\kappa(x)}$ für $n > n_0$ und genügend großes m . Schließlich gilt: $\kappa_1(x) = \inf\{|f(x)|^2, \|f\| = 1, f \in E_1\} \leq \inf\{|f(x)|^2, \|f\| = 1, f \in E\} = \kappa(x)$. \square

Man beachte, daß die Schrankenfunktion κ nicht nur von der Topologie, sondern von der speziellen Wahl der Norm abhängt. In $C(\Omega)$ ist $\kappa \equiv 1$, in stetig eingebetteten Räumen dagegen sind die Verhältnisse weit weniger trivial. Insbesondere führen äquivalente Normen zu verschiedenen Schrankenfunktionen.

Satz 2 (Vervollständigung) Sei E ein normierter Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen. Für jede Cauchyfolge $\{f_m\} \subset E$ gelte

$$(\star) \quad \text{aus } f_m(x) \rightarrow 0 \text{ für alle } x \in \Omega \text{ folgt } f_m \rightarrow 0.$$

Dann besitzt E eine (bis auf Isometrie eindeutige) Vervollständigung $\hat{E} = \overline{E}$ (genauer: es gibt einen Banachraum \hat{E} und eine lineare Isometrie $i : E \rightarrow \hat{E}$ mit $\hat{E} = \overline{i(E)}$ und $f(x) = (if)(x)$ für alle $f \in E$ und $x \in \Omega$). Für die Schrankenfunktionen gilt $\kappa(x) \equiv \hat{\kappa}(x)$ in Ω .

Beweis: Sei \hat{E} die Vervollständigung von E als normierter Raum, bestehend aus Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in E bezüglich der Äquivalenzrelation $\{f_m\} \sim \{g_m\} \Leftrightarrow \|f_m - g_m\| \rightarrow 0$. Es gibt eine Isometrie $i : E \rightarrow \hat{E}$ mit $\overline{i(E)} = \hat{E}$. i bildet jede Cauchyfolge $\{f_n\} \subset E$ auf eine Cauchyfolge in \hat{E} ab, die gegen die Äquivalenzklasse von $\{f_n\}$ konvergiert. Für $f \in E$ definieren wir $i(f)(x) := f(x)$ und bekommen so stetige lineare Einsetzungsfunktionale auf $i(E)$, die wir eindeutig und stetig auf \hat{E} fortsetzen können. Sei nun $\hat{f} \in \hat{E}$ die Äquivalenzklasse einer Cauchyfolge $\{f_n\}$ in E , d.h. $\hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} i(f_n)$ und weiter $\hat{f}(x) = 0$, d.h. $(\lim_{n \rightarrow \infty} i(f_n))(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} i(f_n)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$, so folgt aus (\star) : $\hat{f} = 0$. Ω ist also auch für \hat{E} ein Eindeutigkeitsbereich. \square

Daß man auf die Bedingung (\star) nicht verzichten kann, zeigt folgendes

Beispiel 3 Sei E der lineare Raum der Polynome in x mit der Norm $\|f\| := \max\{|f(n^{-1})| : n \in \mathbb{N}\}$ und $\Omega := \{n^{-1} : n = 2, 3, \dots\}$. E ist FmsE und $\{x^k : k \in \mathbb{N}\}$ ist Cauchyfolge, da $|n^{-k} - n^{-j}| \leq n^{-k} + n^{-j} \leq 2n^{-m} \leq 2^{1-m}$ für $k, j > m$ und $n \neq 1$ ist. Bei $n = 1$ verschwindet die Differenz ohnehin. Die Folge konvergiert außerdem in Ω punktweise gegen 0. Andererseits gilt aber $\|x^k\| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Topologie der punktweisen Konvergenz in Ω wäre also in der Vervollständigung von E als normiertem Raum nicht hausdorffsch, Ω kein Eindeutigkeitsbereich. Dies haben wir aber ausdrücklich ausgeschlossen.

Satz 3 Sei E Banachscher Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen. Er bestehe aus Funktionen, die auf $\Omega_0 \subset \Omega$ beschränkt sind, d.h. $\sup\{|f(x)| : x \in \Omega_0\} < \infty$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein derartiges $\delta > 0$, daß aus $\|f\| < \delta$ stets folgt: $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \Omega_0$. Weiterhin ist auch κ auf Ω_0 beschränkt, d.h. $\sup\{\kappa(x) : x \in \Omega_0\} < \infty$.

Beweis: Dies ist ein Spezialfall des Satzes von der gleichmäßigen Beschränktheit und des Resonanztheorems für Operatoren (hier die Einsetzungsfunktionale $e_x, x \in \Omega_0$) von E in einen allgemeinen normierten Raum $W (= \mathbb{K})$. \square

Zusammen mit Gleichung (1.2) erhält man folgendes

Korollar 3 Sei E ein Banachscher Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen, $\Omega_0 \subset \Omega$. Dann ist κ genau dann auf Ω_0 beschränkt, wenn alle $f \in E$ auf Ω_0 beschränkt sind.

Besteht E insbesondere aus stetigen Funktionen, so ist κ auf Kompakta beschränkt (aber nicht notwendig stetig). Dann konvergieren Cauchyfolgen in E auf Kompakta gleichmäßig punktweise.

Satz 4 Sei (E, Ω') ein Banachscher Funktionenraum, $\Omega_0 \subset \Omega$ und (E, Ω'_0) ein Banachscher Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen und Schrankenfunktion κ_0 . Für jedes $x \in \Omega$ gebe es eine Folge $\{x_n\} \subset \Omega_0$ mit $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \forall f \in E$. Dann ist (E, Ω') ein Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen und Schrankenfunktion $\kappa(x) \leq \limsup\{\kappa_0(x_n)\}$ für jede Folge $\{x_n\}$ mit $f(x) = \lim f(x_n)$.

Beweis: Da $f(x_n)$ konvergiert, ist $\sup_n |f(x_n)| < \infty$. Daraus folgt nach dem Satz 3 $\sup\{\kappa_0(x_n)\} < \infty$. Weiter ist $|f(x_n)|^2 \leq \kappa_0(x_n) \|f\|^2 \leq \sup\{\kappa_0(x_m), m \geq n\} \|f\|^2$ und damit $|f(x)|^2 \leq \limsup \kappa_0(x_n) \|f\|^2$. Also ist $f \mapsto f(x)$ stetig und $\kappa(x) \leq \limsup \kappa_0(x_n) < \infty$. \square

Korollar 4 Sei (E, Ω') ein Banachscher Funktionenraum von stetigen Funktionen auf einem metrischen Raum Ω , Ω_0 dicht in Ω und Ω'_0 seien stetige Einsetzungsfunktionale. Dann ist auch (E, Ω') ein Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen.

Sei $\langle E_1, E_2 \rangle$ ein duales Paar von Funktionenräumen über den Mengen Ω_1 und Ω_2 mit der Bilinearform $(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2 \rangle \in \mathbb{K}$. Die (nicht notwendig stetigen) Einsetzungsfunktionale $e_x^1 : f_1 \mapsto f_1(x)$ (bzw. $e_y^2 : f_2 \mapsto f_2(y)$) sollen in E_2 (bzw. E_1) liegen. Es gilt also $f_1(x) = \langle f_1, e_x^1 \rangle$ und $f_2(y) = \langle e_y^2, f_2 \rangle$. Insbesondere ist $k(y, x) := \langle e_y^2, e_x^1 \rangle = e_y^2(x) = e_x^1(y)$ eine Funktion von $\Omega_2 \times \Omega_1$ nach \mathbb{K} , welche als Funktion je eines Arguments im passenden Funktionenraum liegt.

Sei E ein reflexiver Banachraum, E' sein (topologischer) Dualraum, beide ausgestattet mit stetigen Einsetzungsfunktionalen. Dann folgt aus Satz 1, daß die Funktionensysteme $k(y, \cdot)$, $y \in \Omega_2$, bzw. $k(\cdot, x)$, $x \in \Omega_1$, vollständig in E bzw. E' sind.

Für Hilberträume (mit dem zugehörigen Skalarprodukt als Sesquilinearform anstelle der obigen Bilinearform) werden wir diese Betrachtungsweise in den folgenden Paragraphen zur klassischen Theorie der reproduzierenden Kernfunktion ausbauen. Doch zunächst noch einige Beispiele, welche nach Proposition 2 konstruiert sind:

Beispiel 4 Räume vom Hardy-Typ.

Sei $z \in \mathbb{D} := \{w : |w| < 1\} \subset \mathbb{C}$. Dann ist die Folge $\{z^{j-1}, j \in \mathbb{N}\} \in \ell^q$, d.h. sie ist q -summierbar für jedes $1 < q < \infty$. Sei $\{a_j\} \in \ell^p$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt nach der Hölderschen Ungleichung $|\sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{j-1}| \leq \|\{a_j\}\|_p \|\{z^{j-1}\}\|_q$. Wir können den ℓ^p also mit den stetigen Einsetzungsfunktionalen

$$f := \{a_j\} \mapsto f(z) := \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{j-1} \quad (1.3)$$

über $\Omega = \mathbb{D}$ ausstatten. Weiter ist dann $\kappa(z) = \|\{z^{j-1}\}\|_q^2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |z|^{q(j-1)}\right)^{2/q} = \left(\frac{1}{1-|z|^q}\right)^{2/q}$.

Da die Räume ℓ^p reflexiv sind, bilden $\langle \ell^p, \ell^q \rangle$ ein duales Paar von Funktionenräumen, $k(z, w) = \sum_{j=1}^{\infty} (zw)^{j-1} = \frac{1}{1-zw}$. Die Funktionen dieser Räume sind holomorph in \mathbb{D} . Ist $A = \{z_k\}$ eine Folge mit einem Häufungspunkt in \mathbb{D} , so ist A ein Eindeutigkeitsbereich. Die $e_{z_k} = \{z_k^{j-1}, j \in \mathbb{N}\}$ sind vollständig in ℓ^q , woraus auf recht ungewöhnliche Weise die Separabilität der beiden Räume folgt. Auch die Einsetzungsfunktionale sämtlicher Ableitungen der betrachteten Funktionen sind stetig. Die Einheitsvektoren in ℓ^q stellen das Funktional $f \mapsto (k-1)! f^{(k-1)}(0)$ dar. Da κ auf Kompakta beschränkt ist, folgt aus der Konvergenz in ℓ^p die kompakte Konvergenz der zugehörigen Funktionen. Normbeschränkte Mengen bilden normale Familien.

Beispiel 5 Räume vom Szegö-Typ.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ beschränkt und m -fach zusammenhängend mit stückweise glatten Randkurven Γ_j , $j = 1, \dots, m$. $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_m$ sei über dem reellen Intervall $I = [0, L]$ in Bogenlänge parametrisiert, d.h. $|\dot{\Gamma}| = 1$ fast überall. Dann hat jedes $z \in \Omega$ positiven Abstand δ_z vom Rand und die Funktion $e_z : t \mapsto \frac{\dot{\Gamma}(t)}{2\pi i(\Gamma(t)-z)}$ gehört zu $L^q(I)$ für $1 < q < \infty$: $0 < \int_I \left| \frac{\dot{\Gamma}(t)}{2\pi i(\Gamma(t)-z)} \right|^q dt \leq \int_I \left(\frac{|\dot{\Gamma}(t)|}{2\pi\delta_z} \right)^q dt \leq \frac{L}{(2\pi\delta_z)^q} < \infty$. Auf $L^p(I)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, werden also durch $f \mapsto f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{f(t)\dot{\Gamma}(t)}{\Gamma(t)-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\Gamma^{-1}(\zeta))}{\zeta-z} d\zeta$ stetige lineare Einsetzungsfunktionale erzeugt. Nach Abfaktorisierung von $N = \{f : f(z) = 0, z \in \Omega\}$ bekommt man einen FmsE. Für stückweise stetige Funktionen $f(t)$ auf I erhält man nach dem Satz von Morera holomorphe Gebietsfunktionen $f(z)$. Die ursprünglichen Werte eines Repräsentanten von $f(t)$ auf I sind fast überall stetige Randwerte von $f(z)$ bei $z = \Gamma(t)$. Die stückweise stetigen Funktionen sind in $L^p(I)$ dicht, außerdem ist κ auf Kompakta beschränkt, woraus folgt, daß alle $f(z)$ holomorph sind. Normbeschränkte Mengen bilden wieder normale Familien. Wegen der Abfaktorisierung eines nichttrivialen Raumes N bekommt man zunächst keine Dualitätsbeziehung.

In Kapitel 8 werden die Hilbertraum-Versionen dieser Beispiele näher betrachtet.

Kapitel 2

Hilberträume mit reproduzierendem Kern

Im folgenden sei $\mathcal{H} = (\mathcal{H}, \Omega')$ ein Hilbertraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen. Das Skalarprodukt werde mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet. Aus dem Riesz'schen Darstellungssatz folgt sofort der

Satz 5 *Es gibt genau eine Abbildung $K : \Omega \rightarrow \mathcal{H}$, $x \mapsto K_x$ mit der Reproduktionseigenschaft*

$$f(x) = \langle f, K_x \rangle \quad (2.1)$$

für alle $f \in \mathcal{H}$ und alle $x \in \Omega$.

Definition 4 \mathcal{H} heißt Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K (kurz HmrK). $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, $k(x, y) := \langle K_x, K_y \rangle$ heißt (reproduzierende) Kernfunktion von \mathcal{H} .

Es gilt $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$ und $k(x, x) = \|K_x\|^2 = \kappa(x)$ ist die Schrankenfunktion aus dem vorigen Paragraphen.

Proposition 5 *Unter allen Funktionen $f \in \mathcal{H}$ mit $f(x) = \kappa(x)$ an einer festen Stelle $x \in \Omega$ hat genau die Funktion $\hat{f} = K_x$ minimale Norm $\|\hat{f}\| = \sqrt{\kappa(x)}$.*

Beweis: Die Menge $A = \{f \in \mathcal{H} : f(x) = \kappa(x)\}$ ist konvex, hat also höchstens ein Element \hat{f} minimaler Norm. Da $K_x \in A$ ist und für alle $f \in A$ die Beziehung $\|K_x\|^2 = \kappa(x) = |f(x)| \leq \|f\| \|K_x\|$, also $\|K_x\| \leq \|f\|$ gilt, muß $\hat{f} = K_x$ sein. \square

Satz 6 *Sei \mathcal{H} ein Hilbertscher Funktionenraum. $H_x := \{f \in \mathcal{H} : f(x) = 1\}$. Falls für alle $x \in \Omega$ entweder $H_x = \emptyset$ ist oder es ein $M_x \in H_x$ mit minimaler Norm gibt, dann ist \mathcal{H} ein HmrK mit reproduzierenden Elementen $K_x = M_x \|M_x\|^{-2}$, falls $H_x \neq \emptyset$ und $K_x = 0$ sonst.*

Beweis: Sei $H_x \neq \emptyset$, d.h. es existiere $M_x \neq 0$. Sei weiterhin $\varphi \in \mathcal{H}$ beliebig. Für $\varphi(x) = 0$ setze man $\psi := \varphi$, sonst $\psi := M_x - \frac{\varphi}{\varphi(x)}$. In beiden Fällen ist $\psi(x) = 0$, also $M_x^* := M_x + \lambda \psi \in H_x$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Aus $\|M_x^*\|^2 = \|M_x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle M_x, \psi \rangle) + |\lambda|^2 \|\psi\|^2$ folgt wegen der Minimalitätseigenschaft von M_x notwendig $2 \operatorname{Re}(\lambda \langle M_x, \psi \rangle) + |\lambda|^2 \|\psi\|^2 \geq 0$. Da dies für beliebiges $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt, muß $\langle M_x, \psi \rangle = 0$ sein. Im Falle $\varphi \neq \psi$, d.h. $\varphi(x) \neq 0$ bekommt man die Reproduktionseigenschaft wie folgt:

$$\langle M_x - \frac{\varphi}{\varphi(x)}, M_x \rangle = 0 \Rightarrow \|M_x\|^2 = \frac{1}{\varphi(x)} \langle \varphi, M_x \rangle \Rightarrow \varphi(x) = \langle \varphi, \frac{M_x}{\|M_x\|^2} \rangle.$$

\square

Proposition 6 *Sei $\Omega_0 \subset \Omega$. Dann ist Ω_0 genau dann Eindeutigkeitsbereich für \mathcal{H} , wenn $\mathcal{H} = \operatorname{span}\{K_x, x \in \Omega_0\}$ ist, d.h. die K_x ein vollständiges System in \mathcal{H} bilden.*

Beweis: Dies folgt aus Satz 1 und der (konjugiert) linearen Homöomorphie von \mathcal{H} und \mathcal{H}' . \square

In einem HmrK genügt es weitgehend, das Verhalten der Kernfunktion in dem fraglichen Zusammenhang zu kennen. Ist beispielsweise L ein stetiges lineares Funktional in \mathcal{H} , so gilt für sein darstellendes Element $\ell \in \mathcal{H}$:

$$\ell(x) = \langle \ell, K_x \rangle = \overline{\langle K_x, \ell \rangle} = \overline{LK_x}. \quad (2.2)$$

Falls \mathcal{H} einen abzählbaren Eindeutigkeitsbereich Ω_0 besitzt, ist \mathcal{H} separabel, $\{K_x, x \in \Omega_0\}$ ist ein vollständiges System und mit dem Orthonormierungsverfahren von E. SCHMIDT kann daraus ein vollständiges Orthonormalsystem gewonnen werden. Umgekehrt läßt sich mit einem vollständigen Orthonormalsystem die Kernfunktion berechnen:

Proposition 7 Sei $\Phi \subset \mathcal{H}$ ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem. Dann hat K_x die Fourierkoeffizienten $\langle K_x, \varphi \rangle = \overline{\varphi(x)}$, $\varphi \in \Phi$. An jeder festen Stelle $x \in \Omega$ sind nur abzählbar viele $\varphi \in \Phi$ von Null verschieden. In einem separablen Hilbertraum mit reproduzierendem Kern und einem beliebigen vollständigen Orthonormalsystem $\Phi = \{\varphi_j, j \in \mathbb{N}\}$ hat die Kernfunktion k die Darstellung

$$k(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\varphi_j(x)} \varphi_j(y). \quad (2.3)$$

Die Reihe konvergiert absolut für alle $x, y \in \Omega$. Falls für irgend ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertschen Funktionenraum \mathcal{H} die Reihe (2.3) in der Diagonalen $x = y$ konvergiert, dann ist k reproduzierender Kern für \mathcal{H} .

Beweis: Zur absoluten Konvergenz von (2.3): Da $\overline{\varphi_j(x)}$ Fourierkoeffizienten von K_x sind, ist $|\varphi_j(x)|$ eine ℓ^2 -Folge. Aus der Hölderungleichung für den ℓ^2 folgt $\sum |\varphi_j(x)| |\varphi_j(y)| \leq \sum |\varphi_j(x)|^2 \sum |\varphi_j(y)|^2 = \|K_x\|^2 \|K_y\|^2 < \infty$. Die Konvergenz von (2.3) für $x = y$ bedeutet, daß $\{\varphi_j(x)\} \in \ell^2$ Fourierkoeffizienten eines Elements $K_x \in \mathcal{H}$ sind. Für K_x weist man sofort die Reproduktionseigenschaft (2.1) nach. \square

Satz 7 Sei Ω ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

1. Die Abbildung $K : \Omega \rightarrow \mathcal{H}$, $x \mapsto K_x$, ist bezüglich der schwachen Topologie von \mathcal{H} stetig,
2. \mathcal{H} besteht nur aus stetigen Funktionen,
3. alle K_x , $x \in \Omega$, sind stetige Funktionen und κ ist eine auf Kompakta beschränkte Funktion.

K ist genau dann stark stetig, wenn κ und alle K_x , $x \in \Omega$, stetig sind.

Beweis: (1. \Leftrightarrow 2.) folgt aus der Definition der schwachen Stetigkeit. Aus 2. folgt insbesondere, daß die K_x stetig sind. Da die f auf Kompakta beschränkt sind, ist es auch κ . Es gilt (2. \Rightarrow 3.). Aus 3. folgt, daß $\text{span}\{K_x, x \in \Omega\}$ aus stetigen Funktionen besteht. Da diese Menge dicht in \mathcal{H} liegt, läßt sich durch sie jedes $f \in \mathcal{H}$ in der Norm — und wegen der lokalen Beschränktheit von κ auch kompakt-gleichmäßig — approximieren, ist also selbst stetig. Dies ergibt (3. \Rightarrow 2.).

Seien nun κ und alle K_x stetig und y_n eine gegen y konvergente Folge in Ω . Dann ist K schwach stetig und K_{y_n} konvergiert schwach gegen K_y . Ebenso konvergiert die Folge der Normquadrate $\kappa(y_n)$ gegen das Normquadrat $\kappa(y)$ des Grenzwertes. Hieraus folgt die starke Konvergenz und da Ω metrisch ist, die starke Stetigkeit von K . \square

Da die schwache Topologie echt gröber als die Normtopologie ist, braucht die Funktion κ selbst dann nicht notwendig stetig zu sein, wenn alle $f \in \mathcal{H}$ stetig sind.

Proposition 8 Sind alle $f \in \mathcal{H}$ stetig und ist $\Omega_0 \subset \Omega$ dicht in Ω , so liegt $\text{span}\{K_x : x \in \Omega_0\}$ dicht in \mathcal{H} .

Beweis: Sei $f \in \mathcal{H}$, $f \in \{K_x : x \in \Omega_0\}^\perp$, d.h. $\langle f, K_x \rangle = f(x) = 0$ für alle $x \in \Omega_0$. Da f stetig ist, verschwindet f in ganz Ω und ist somit die Nullfunktion. Ω_0 ist Eindeutigkeitsbereich und Proposition 6 liefert die Behauptung. \square

Satz 8 Sei Ω ein Gebiet in \mathbb{K} . Dann sind äquivalent:

1. Die Abbildung $K : x \mapsto K_x$ ist schwach nach \bar{x} differenzierbar,
2. alle $f \in \mathcal{H}$ sind differenzierbare Funktionen und das Auswertungsfunktional $f \mapsto f'(x)$ der Ableitung stellt an jeder festen Stelle $x \in \Omega$ ein stetiges Funktional dar,
3. alle $K_x, x \in \Omega$, sind differenzierbar und

$$D(x, y) := \frac{1}{x - y} \left(\frac{k(x, x) - k(y, x)}{\bar{x} - \bar{y}} - \frac{k(x, y) - k(y, y)}{\bar{x} - \bar{y}} \right)$$

ist für y aus einer Umgebung von x beschränkt.

Im positiven Fall ist

$$K'_x = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} k(x, \cdot) \quad (2.4)$$

die schwache Ableitung von K nach \bar{x} und das darstellende Element von $f \mapsto f(x)$. K ist genau dann stark differenzierbar, wenn zusätzlich $D(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow x} \frac{\partial^2}{\partial y \partial \bar{x}} k(x, y) \Big|_{y=x} =: D(x)$ konvergiert.

Beweis: K ist genau dann schwach nach \bar{x} differenzierbar, wenn der Differenzenquotient schwach konvergiert, also wenn für jedes $x \in \Omega$ ein $K'_x \in \mathcal{H}$ existiert mit: $f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{y \rightarrow x} \langle f, \frac{K_x - K_y}{\bar{x} - \bar{y}} \rangle \stackrel{!}{=} \langle f, K'_x \rangle$ für alle $f \in \mathcal{H}$. Dies ist äquivalent mit der zweiten Bedingung. Weiter erhält man (nach kurzer Rechnung) $\left\| \frac{K_x - K_y}{\bar{x} - \bar{y}} \right\|^2 = D(x, y)$. Da die K_x unter der Voraussetzung 3. ein in \mathcal{H} vollständiges System differenzierbarer Funktionen bilden und die Normen der darstellenden Elemente des Differenzenquotienten beschränkt sind, folgt die schwache Konvergenz des Differenzenquotienten aus dem Satz von Banach-Steinhaus, also gilt (3. \Rightarrow 1.).

Ferner ist dann $K'_x(y) = \langle K'_x, K_y \rangle = \overline{(K_y)'(x)} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} k(y, x) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} k(x, y)$, womit (2.4) gezeigt ist. Die starke Differenzierbarkeit, also die starke Konvergenz des Differenzenquotienten setzt zusätzlich die Konvergenz der Normen der darstellenden Elemente voraus: $D(x, y) \rightarrow \|K'_x\|^2 = (K'_x)'(x) = D(x)$. \square

Für Gebiete in \mathbb{K}^n gilt die entsprechende Aussage für partielle Ableitungen. Natürlich kann man auch höhere Ableitungen betrachten. Im komplexen Fall fallen die schwache und die starke Differenzierbarkeit von K zusammen, außerdem existieren dann alle Ableitungen der Funktionen in \mathcal{H} , ihre Auswertungsfunktionale sind stetig und mit der Kernfunktion darstellbar.

Wir wollen nun einen Zusammenhang herstellen zwischen der Struktur von \mathcal{H} und der Geometrie des Gebiets Ω . In gewissen HmrK von holomorphen Funktionen wird sich hieraus später eine Verbindung zu konformen Abbildungen ergeben. Sei G eine Gruppe von Isometrien auf \mathcal{H} , die auch auf Ω operiert. Das Resultat der Operation von $g \in G$ auf $x \in \Omega$ werde mit x_g bezeichnet. Es gelte die Verträglichkeitsbeziehung

$$g(f)(x_g) = J_g(x) f(x), \quad J_g(x) \neq 0, \quad \text{für } f \in \mathcal{H}, x \in \Omega, g \in G. \quad (2.5)$$

Proposition 9 Mit obigen Bezeichnungen ist

$$k(x_g, y_g) = \overline{J_g(x)} J_g(y) k(x, y), \quad (2.6)$$

$$\text{sowie } \overline{J_g(x)} J_g(y) = \frac{k(x_g, y_g)}{k(x, y)} \text{ und } |J_g(x)| = \frac{\kappa(x_g)}{\kappa(x)}. \quad (2.7)$$

Beweis: (2.5) bedeutet $\langle g(f), K_{x_g} \rangle = J_g(x) \langle f, K_x \rangle$. Insbesondere ist $k(x_g, y_g) = \langle K_{x_g}, K_{y_g} \rangle = J_g(y) \langle g^{-1}(K_{x_g}), K_y \rangle \stackrel{\text{isom.}}{=} J_g(y) \langle K_{x_g}, g(K_y) \rangle = J_g(y) \langle g(K_y), K_{x_g} \rangle = \overline{J_g(x)} J_g(y) k(x, y)$. \square

Operiert G transitiv auf Ω , d.h. gibt es zu jedem $x \in \Omega$ ein g_x mit $x_{g_x} = v$ für ein festes $v \in \Omega$, dann gilt

$$k(x, y) = \frac{k(v, y_{g_x})}{\overline{J_{g_x}(x)} J_{g_x}(y)}. \quad (2.8)$$

Es genügt also, wenn man K_v für einen einzigen Punkt $v \in \Omega$ kennt. Ist Ω selbst eine (additiv geschriebene) Gruppe, so operiert Ω transitiv per Rechtsaddition auf sich selbst. Induziert dann $x \mapsto x_\xi := x + \xi$ für jedes $\xi \in \Omega$ eine Isometrie $f \mapsto f_\xi$ auf \mathcal{H} mit $f_\xi(x) = f(x + \xi)$, so heißt \mathcal{H} translationsinvariant. Es gilt $J_\xi \equiv 1$, $k(x, y) = k(v, y - x + v)$ ist also eine Funktion von $x - y$ und $\kappa(x) = k(x, x) = k(v, v)$ eine Konstante.

Falls $v \in \Omega$ Fixpunkt für alle Operationen von G ist (man denke etwa an Drehungen oder Spiegelungen) und $|J_g| \equiv 1$ (d.h. $\kappa(x_g) \equiv \kappa(x)$) für alle $g \in G$ gilt, so folgt $K_v(x) = K_v(x_g)$, $g \in G$, d.h. das reproduzierende Element K_v ist „invariant“ unter G .

Wir wollen schließlich noch eine charakterisierende Eigenschaft dafür angeben, wann eine Funktion $k(x, y)$ reproduzierende Kernfunktion eines HmrK ist.

Proposition 10 Sei $\Omega_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine endliche Teilmenge von Ω . Die $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij} := k(x_j, x_i) = \langle K_{x_j}, K_{x_i} \rangle$ ist hermitesch und positiv semidefinit. Sie ist definit, falls $\{K_{x_i}, i = 1, \dots, n\}$ linear unabhängig sind.

Beweis: Man setze $f := \sum_{j=1}^n \xi_j K_{x_j}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Dann ist $0 \leq \|f\|^2 = \langle \sum \xi_j K_{x_j}, \sum \xi_i K_{x_i} \rangle = \sum_{j,i} \xi_j \bar{\xi}_i \langle K_{x_j}, K_{x_i} \rangle = \xi^* A \xi$. „ $=0$ “ gilt genau dann, wenn $\sum \xi_i K_{x_i} = 0$ ist, also die K_{x_i} linear abhängig sind. \square

Dies gilt offensichtlich für jede Matrix, die analog zu A aus den Skalarprodukten von Elementen eines Hilbertraums gebildet wird. Eine solche Matrix heißt *Gramsche Matrix*. Die (weniger triviale) Umkehrung liefert der

Satz 9 (Moore, Aronszajn) Sei Ω eine Menge, $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ und für jede endliche Teilmenge $\Omega_n \subset \Omega$ sei die Matrix

$$A = (k(x_j, x_i))_{i,j=1}^n \quad (2.9)$$

positiv semidefinit und hermitesch. Dann gibt es einen Hilbertraum mit Kernfunktion k über Ω .

Beweis: Ist A positiv semidefinit, so gibt es eine positiv semidefinite Wurzel \tilde{A} mit $\tilde{A}^* \tilde{A} = A$ und $\xi^* A \xi = \xi^* \tilde{A}^* \tilde{A} \xi = (\tilde{A} \xi)^* \tilde{A} \xi = 0 \Leftrightarrow \tilde{A} \xi = 0$, aus letzterem folgt aber wieder $A \xi = 0$. Es gilt:

$$\xi^* A \xi = 0 \Leftrightarrow \xi \in \ker A. \quad (2.10)$$

Wir betrachten nun die zur endlichen Teilmenge $\{x_1, \dots, x_n, x\}$ gehörende erweiterte Matrix $\hat{A} = \begin{pmatrix} A & | & k(x, x_i)_i \\ \hline k(x_i, x)_i & | & k(x, x) \end{pmatrix}$. Aus $A \xi = 0$ folgt $(\xi^* | 0) \hat{A} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = (\xi^* | 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_x \end{pmatrix} = 0$. Dann ist aber nach (2.10) auch $\hat{A} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, d.h. $\alpha_x = \sum_{i=1}^n k(x_i, x) \xi_i = 0$.

Wir betrachten die Funktionen $K_x : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, $K_x(y) := k(x, y)$ und den von ihnen erzeugten Funktionenraum $\mathcal{L} := \text{span}\{K_x, x \in \Omega\}$. Für ein beliebiges $f := \sum_{i=1}^n \xi_i K_{x_i} \in \mathcal{L}$ folgt aus $f(x_k) = \sum_{j=1}^n \xi_j K_{x_j}(x_k) = A \xi|_k = 0$ für $k = 1, \dots, n$ nach den obigen Überlegungen stets $f(x) = \alpha_x = 0$ für jedes $x \in \Omega$. f ist genau dann die Nullfunktion, wenn $\xi^* A \xi = 0$ ist. Dies erlaubt es uns, durch $\langle K_x, K_y \rangle := k(x, y)$ und dessen lineare Fortsetzung ein Skalarprodukt in \mathcal{L} einzuführen. Im Prähilbertraum \mathcal{L} hat K_x die Reproduktionseigenschaft

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i K_{x_i} \right)(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i k(x_i, x) = \left\langle \sum_{i=1}^n \xi_i K_{x_i}, K_x \right\rangle = \langle f, K_x \rangle.$$

In der Vervollständigung \mathcal{H} von \mathcal{L} (mit den durch K_x dargestellten stetigen Fortsetzungen der Einsetzungsfunktionale in \mathcal{L}) ist $\mathcal{L} = \text{span}\{K_x, x \in \Omega\}$ dicht, also $\mathcal{L}^\perp = 0$, d.h. aus $f(x) = \langle f, K_x \rangle = 0$ für alle $x \in \Omega$ folgt $f = 0$. Ω ist Eindeutigkeitsbereich und somit \mathcal{H} ein Hilbertscher Funktionenraum mit der Kernfunktion k . \square

Der so konstruierte HmrK ist im wesentlichen eindeutig bestimmt:

Proposition 11 Seien \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 HmrK über Ω . Dann gibt es genau dann eine Normisomorphie $i : \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_2$, $(if)(x) = f(x)$ für alle f, x , wenn die Kernfunktionen übereinstimmen.

Beweis: Sei i wie angegeben, dann folgt $\langle if, iK_x^{(1)} \rangle = \langle f, K_x^{(1)} \rangle = f(x) = (if)(x)$, also $iK_x^{(1)} = K_x^{(2)}$ und damit $K_x^{(1)}(y) = K_x^{(2)}(y)$ für alle $x, y \in \Omega$. Stimmen umgekehrt die Kernfunktionen überein, so wird durch $f_1 = \sum_{j=1}^n \xi_j K_{x_j}^{(1)} \sim \sum_{j=1}^n \xi_j k(x_j, \cdot) \sim \sum_{j=1}^n \xi_j K_{x_j}^{(2)} = f_2$ eine lineare Isomorphie $i: \text{span}\{K_x^{(1)}\} \rightarrow \text{span}\{K_x^{(2)}\}$, $f_1 \mapsto f_2$ gegeben. Wegen $\|f_1\|^2 = \xi^*(k(x_j, x_i)_{ij})\xi = \|f_2\|^2$ ist diese zu einer Normisomorphie zwischen den HmrK fortsetzbar. \square

Literatur (u.a.):

1. ARONSZAJN [Ar] (Standardarbeit, liefert auch historische Hinweise und Beispiele).
2. BERGMAN [Bm].
3. H. SHAPIRO [Sh, Seiten 81–107].

Kapitel 3

Operatoren und Teilräume in HmrK

Seien \mathcal{H}_j Hilberträume mit reproduzierenden Kernen $K^{(j)}$, $j = 1, 2$. $L : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ sei ein stetiger linearer Operator, L^* sein adjungierter Operator. Dann gilt $(Lf)(x) = \langle Lf, K_x^{(2)} \rangle_2 = \langle f, L^*K_x^{(2)} \rangle_1$. $\Lambda := L^* \circ K^{(2)} : \Omega_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ heißt *darstellender Kern* von L , $\Lambda(x, y) := (L^*K_x^{(2)})(y)$ die zugehörige Kernfunktion; hier ist $x \in \Omega_2, y \in \Omega_1$. L^* hat den Kern $\Lambda^* = L \circ K^{(1)}$. Für die Kernfunktionen gilt $\Lambda^*(y, x) = \langle LK_y^{(1)}, K_x^{(2)} \rangle = \langle L^*K_x^{(2)}, K_y^{(1)} \rangle = \overline{\Lambda(x, y)}$. Insbesondere besitzen selbstadjungierte Operatoren in HmrK konjugiert-symmetrische Kernfunktionen. In einem separablen HmrK hat man die zu (2.3) analoge Darstellung mit einem vollständigen Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}$

$$\Lambda(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \Lambda_x, \varphi_j \rangle \varphi_j(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{L\varphi_j(x)} \varphi_j(y). \quad (3.1)$$

Sei nun U ein unitärer Operator auf dem separablen HmrK \mathcal{H} , d.h. $U^* = U^{-1}$. Ist $\Phi = \{\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} , so ist auch $\Psi = U(\Phi)$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} . Man erhält die Darstellung $\Lambda(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\Psi_j(x)} \varphi_j(y)$.

Ist L ein selbstadjungierter kompakter Operator, dann gibt es eine Orthonormalbasis $\{\varphi_j, j \in \mathbb{N}\}$ von $L(\mathcal{H})$, die aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_j von L besteht. Für den darstellenden Kern ist $\langle \Lambda_x, \varphi_j \rangle = \langle K_x, L\varphi_j \rangle = \overline{\lambda_j \varphi_j(x)}$, also $\Lambda(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\lambda_j \varphi_j(x)} \varphi_j(y)$.

Sei \mathcal{H} ein HmrK, $\mathcal{H}_1 \sqsubset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum mit den auf \mathcal{H}_1 eingeschränkten Einsetzungsfunktionalen von \mathcal{H} . Sei $K^{(1)} = P \circ K$ der darstellende Kern der Orthogonalprojektion $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1$. Dann ist $K_x^{(1)} = PK_x \in \mathcal{H}_1$ und $(Pf)(x) = \langle Pf, K_x \rangle = \langle f, K_x^{(1)} \rangle$. $K^{(1)}$ ist also der (eindeutig bestimmte) reproduzierende Kern des HmrK \mathcal{H}_1 . Für die Projektionsdarstellung $(Pf)(x) = \langle f, K_x^{(1)} \rangle$ ist nur die Reproduktionseigenschaft von $K^{(1)}$ in \mathcal{H}_1 notwendig, \mathcal{H} braucht kein HmrK zu sein.

Sind \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 orthogonal komplementäre Teilräume des HmrK \mathcal{H} , so gilt für die Kerne:

$$K_x = P_1 K_x + P_2 K_x = K_x^{(1)} + K_x^{(2)}. \quad (3.2)$$

Für zwei beliebige HmrK $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ über einer Menge Ω mit Kernfunktionen k_1, k_2 gibt es einen HmrK $\mathcal{H} = \frac{(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)}{N}$ mit $N = \{(f_1, f_2) : f_1(x) + f_2(x) \equiv 0\}$ und den Einsetzungsfunktionalen $(f_1, f_2) \mapsto f_1(x) + f_2(x) = \langle f_1, K_x^{(1)} \rangle + \langle f_2, K_x^{(2)} \rangle = \langle (f_1, f_2), (K_x^{(1)}, K_x^{(2)}) \rangle_{\mathcal{H}}$. Folglich ist $k(x, y) = k_1(x, y) + k_2(x, y)$ die Kernfunktion von \mathcal{H} .

Sei $\Omega_0 \subset \Omega$. Dann ist $\mathcal{H}_0 := \overline{\text{span}\{K_x, x \in \Omega_0\}}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von \mathcal{H} mit einer Orthogonalprojektion $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$. $Pf(x) = \langle f, PK_x \rangle = \langle f, K_x \rangle = f(x)$ für $x \in \Omega_0$ und $\mathcal{H}_0^\perp = \{f \in \mathcal{H} : \langle f, K_x \rangle = f(x) = 0 \text{ für alle } x \in \Omega_0\}$. Aus $f_0 \in \mathcal{H}_0$ und $f_0(x) = 0$ für alle $x \in \Omega_0$ folgt $f_0 = 0$. Ω_0 ist Eindeutigkeitsbereich für \mathcal{H}_0 . $f_0 = Pf \in \mathcal{H}_0$ ist die einzige Funktion minimaler Norm in \mathcal{H} , für die $f_0|_{\Omega_0} \equiv f|_{\Omega_0}$ ist. \mathcal{H}_0 ist isometrisch zu $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0^\perp$. Wir nennen \mathcal{H}_0 den Raum der Einschränkungen auf Ω_0 . $(\mathcal{H}_0, \Omega_0')$ ist HmrK mit Kernfunktion $k_0 \equiv k|_{\Omega_0 \times \Omega_0}$.

Satz 10 Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, $\Omega_i \subset \Omega_{i+1}$ für $i \in \mathbb{N}$ und $(\mathcal{H}_i, \Omega_i')$ seien Hilberträume mit Kernfunktion k_i . Es sei $k_j|_{\Omega_i} \equiv k_i$ für $i \leq j$. Dann gibt es einen (bis auf Isometrie eindeutigen) HmrK (\mathcal{H}, Ω') , für den die \mathcal{H}_i die Räume der Einschränkungen auf Ω_i sind.

Beweis: Für alle $x, y \in \Omega$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x, y \in \Omega_n$. Man definiert $k(x, y) := k_n(x, y)$. Für die hierdurch wohldefinierte Funktion $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ ist jede Matrix (2.9) positiv semidefinit und nach Satz 9 gibt es einen HmrK \mathcal{H} mit Kernfunktion k . Die Einschränkungen $k|_{\Omega_n \times \Omega_n}$ sind identisch mit den Kernfunktionen k_n der Räume \mathcal{H}_n . □

Satz 11 Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum, $\{g_x : x \in \Omega\} \subset \mathcal{H}$ über einer Menge Ω indiziert, $N = \{g_x\}^\perp$. Dann ist $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}/N$ ein HmrK mit den Einsetzfunktionalen $\hat{f} \mapsto \hat{f}(x) := \langle f, g_x \rangle$, $f \in \hat{f} = f + N$, und der Kernfunktion $k(x, y) = \langle g_x, g_y \rangle$.

Beweis: Nach Proposition 2 ist $\widehat{\mathcal{H}}$ mit den angegebenen (wohldefinierten, von der Wahl des Repräsentanten $f \in \hat{f}$ unabhängigen) Einsetzfunktionalen ein FmsE. Sei $M = \overline{\text{span}\{g_x\}} = N^\perp$. Dann ist $\mathcal{H} = M \oplus N$ und $\widehat{\mathcal{H}} \cong M$, $P : \mathcal{H} \rightarrow M$ sei Orthogonalprojektion. Insbesondere ist $\langle Pf, Pg \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ und $Pg_x = g_x$. Es folgt $\hat{f}(x) = \langle f, g_x \rangle = \langle f, Pg_x \rangle = \langle Pf, g_x \rangle = \langle Pf, Pg_x \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}_x \rangle$ und damit $k(x, y) = \langle \hat{g}_x, \hat{g}_y \rangle = \langle g_x, g_y \rangle$. □

Satz 12 Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum mit Kernfunktion k , L_j , $j = 1, \dots, n$, seien linear unabhängige stetige lineare Funktionale auf \mathcal{H} mit Repräsentanten $\ell_j \in \mathcal{H}$. $Q = (\langle \ell_i, \ell_j \rangle)_{i,j=1}^n$.

Dann ist $k_n(x, y) = \frac{1}{\det Q} \begin{vmatrix} k(x, y) & \overline{\ell_1(x)} & \dots & \overline{\ell_n(x)} \\ \ell_1(y) & & & \\ \vdots & & Q & \\ \ell_n(y) & & & \end{vmatrix}$ die Kernfunktion von $\mathcal{H}_n = \{f \in \mathcal{H} : L_j f = 0, j = 1, \dots, n\}$.

Beweis: Durch Entwickeln der (großen) Determinante nach der ersten Spalte bekommt man $K_x^{(n)} = K_x + \sum_{r=1}^n c_r(x) \ell_r \in \mathcal{H}$. Weiter ist $L_s K_x^{(n)} = \langle K_x^{(n)}, \ell_s \rangle = \overline{\ell_s(x)} + \sum c_r(x) \langle \ell_r, \ell_s \rangle$, wieder als Determinante geschrieben ergibt sich

$$L_s K_x^{(n)} = \frac{1}{\det Q} \begin{vmatrix} \overline{\ell_s(x)} & \overline{\ell_1(x)} & \dots & \overline{\ell_n(x)} \\ \langle \ell_1, \ell_s \rangle & & & \\ \vdots & & Q & \\ \langle \ell_n, \ell_s \rangle & & & \end{vmatrix} = 0,$$

da in der Determinante die erste und die $s+1$ -te Spalte übereinstimmen. Daraus folgt $K_x^{(n)} \in \mathcal{H}_n$ und wegen $\langle f, K_x^{(n)} \rangle = \langle f, K_x + \sum c_r(x) \ell_r \rangle = f(x) + \sum c_r(x) L_r f = f(x)$ für alle $f \in \mathcal{H}_n$ (d.h. $L_r f = 0$), ist $K^{(n)}$ der reproduzierende Kern von \mathcal{H}_n . □

Sind die L_i Einsetzfunktionale an endlich vielen Stellen $x_i \in \Omega$, so hat man $\ell_i = K_{x_i}$ und für den Raum der Funktionen aus \mathcal{H} , die bei x_i Nullstellen haben, gilt das folgende

Korollar 5 Sei $\Omega_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \Omega$, $\mathcal{H}_n = \{f \in \mathcal{H} : f|_{\Omega_n} \equiv 0\} \subset \mathcal{H}$. Sei $Q = (k(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$ und $\det Q \neq 0$. Dann hat \mathcal{H}_n die reproduzierende Kernfunktion

$$k_n(x, y) = \frac{1}{\det Q} \begin{vmatrix} k(x, y) & k(x, x_1) & \dots & k(x, x_n) \\ k(x_1, y) & & & \\ \vdots & & Q & \\ k(x_n, y) & & & \end{vmatrix}.$$

Satz 13 Seien $L_i \in \mathcal{H}'$, $i \in \mathbb{N}$, linear unabhängig, k_n Kernfunktionen von $\mathcal{H}_n = \{f \in \mathcal{H} : L_i f = 0, i = 1, \dots, n\}$. Dann ist $k_\infty(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(x, y)$ Kernfunktion von $\mathcal{H}_\infty = \{f \in \mathcal{H} : L_i f = 0, i \in \mathbb{N}\}$. Es liegt neben der Normkonvergenz $K_x^{(n)} \rightarrow K_x$ auch in beiden Argumenten jeweils gleichmäßige Konvergenz in jeder Teilmenge von Ω vor, in der $\kappa(x) = k(x, x)$ beschränkt ist.

Beweis: Sei $K^{(\infty)}$ der reproduzierende Kern des abgeschlossenen Teilraums $\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{H}$. Seien $\ell_i \in \mathcal{H}$ wieder die Repräsentanten von $L_i \in \mathcal{H}'$, $m_i \in \mathcal{H}$ sollen durch Orthonormieren aus den ℓ_i hervorgehen. $S_n := \text{span}\{\ell_i, i = 1, \dots, n\}$ und $S := \text{span}\{\ell_i, i \in \mathbb{N}\}$ haben dann die Orthonormalbasen $\{m_i, i = 1, \dots, n\}$ bzw. $\{m_i, i \in \mathbb{N}\}$. S ist Orthogonalkomplement von \mathcal{H}_∞ in \mathcal{H} , S_n in \mathcal{H}_n . Daraus folgt für die Kernfunktionen (wegen (3.2) und (2.3)) $k(x, y) = k_\infty(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} \overline{m_j(x)} m_j(y)$ und $k_n(x, y) = k_\infty(x, y) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \overline{m_j(x)} m_j(y)$. Also ist

$$\begin{aligned} \left\| K_x^{(n)} - K_x^{(\infty)} \right\|^2 &= \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \overline{m_j(x)} m_j \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |m_j(x)|^2 \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \text{ Weiterhin gilt } |k_n(x, y) - k_\infty(x, y)|^2 = \\ &|\langle K_x^{(n)} - K_x^{(\infty)}, K_y \rangle|^2 \leq \kappa(y) \left\| K_x^{(n)} - K_x^{(\infty)} \right\|^2 \text{ und ebenso } |k_n(x, y) - k_\infty(x, y)|^2 \leq \kappa(x) \left\| K_y^{(n)} - K_y^{(\infty)} \right\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Insbesondere hat man für $L_i f = f(x_i)$, d.h. $\ell_i = K_{x_i}$ für $x_i \in \Omega_0$, die Kernfunktion für den Raum der Funktionen aus \mathcal{H} , die auf der abzählbaren Teilmenge $\Omega_0 \subset \Omega$ verschwinden.

Satz 14 *In einem separablen Hilbertraum mit reproduzierendem Kern \mathcal{H} hat jeder abgeschlossene lineare Teilraum die Form \mathcal{H}_∞ bzw. \mathcal{H}_n .*

Beweis: Sei $H \subset \mathcal{H}$ abgeschlossener linearer Teilraum. Da H^\perp ebenfalls separabel ist, gibt es in H^\perp eine abzählbare dichte Teilmenge M . Es gilt: $H = H^{\perp\perp} = \overline{M}^\perp = \{f \in \mathcal{H} : \langle f, \ell \rangle = 0 \text{ für alle } \ell \in M\}$. O.B.d.A. ist M linear unabhängig. Die Teilräume mit endlicher Kodimension n in \mathcal{H} führen auf einen Raum \mathcal{H}_n . \square

Kapitel 4

Interpolation

Im letzten Paragraphen haben wir Teilräume von Hilberträumen betrachtet, die als Orthogonalräume zu höchstens abzählbaren Systemen $\{\ell_j\}$ gegeben waren. In HmrK kann man daraus Aussagen über Teilräume von Funktionen mit vorgeschriebenen Nullstellen gewinnen. In diesem Paragraphen geht es nun um Interpolationsprobleme, d.h. um Funktionen, die auf einer gegebenen Teilmenge $\Omega_0 \subset \Omega$ vorgeschriebene Werte annehmen. Wir beginnen mit einem allgemeinen Satz über Hilberträume:

Satz 15 Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum, $\{\ell_i, i \in I\} \subset \mathcal{H}$, $L_i f = \langle f, \ell_i \rangle$, $L_i \in \mathcal{H}'$. Weiterhin sei $F : I \rightarrow \mathbb{K}, i \mapsto F_i$, vorgegeben, $H_F := \{f \in \mathcal{H} : \langle f, \ell_i \rangle = F_i, i \in I\}$ und $\mathcal{H}_0 = \overline{\text{span}\{\ell_i, i \in I\}}$. Dann ist $H_F \neq \emptyset$ genau dann, wenn $H_F \cap \mathcal{H}_0 = \{\hat{f}\}$. \hat{f} ist einziges Element minimaler Norm in H_F .

Beweis: Sei $H_F \neq \emptyset$ (die andere Richtung ist trivial). H_F ist abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit in \mathcal{H} und konvex, es gibt also genau ein Element \hat{f} minimaler Norm in H_F . Sei $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$ Orthogonalprojektion. Dann ist $\langle P\hat{f}, \ell_i \rangle = \langle \hat{f}, \ell_i \rangle = F_i$, also $P\hat{f} \in \mathcal{H}_0 \cap H_F$. Da $\|P\hat{f}\| \leq \|\hat{f}\|$ ist, folgt aus der Minimalität von $\|\hat{f}\|$ in H_F : $\hat{f} = P\hat{f} \in H_F \cap \mathcal{H}_0$. Sei nun auch $f \in H_F \cap \mathcal{H}_0$. Dann ist $\langle f - \hat{f}, \ell_i \rangle = 0$ für alle $i \in I$ und damit $f - \hat{f} \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_0^\perp = 0$. \square

Für Hilberträume mit stetigen Einsetzungsfunktionalen folgt daraus:

Korollar 6 Sei \mathcal{H} HmrK über Ω , $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mathcal{H}_0 = \overline{\text{span}\{K_x, x \in \Omega_0\}}$, $F : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{K}$ gegeben und $H_F = \{f \in \mathcal{H} : f|_{\Omega_0} \equiv F\}$. Dann ist $H_F \neq \emptyset$ genau dann, wenn $H_F \cap \mathcal{H}_0 = \{\hat{f}\}$ und \hat{f} ist eindeutig bestimmte Lösung minimaler Norm.

Korollar 7 Falls $I = \{1, \dots, n\}$ endlich ist, hat \mathcal{H}_0 endliche Dimension und man erhält ein lineares Gleichungssystem $\xi Q = y$ mit $Q = (\langle \ell_i, \ell_j \rangle)_{i,j=1}^n$, $y = (F_1, \dots, F_n)$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Es ist $\hat{f} = \sum_{i=1}^n \xi_i \ell_i$, falls eine Lösung existiert. Sind die ℓ_i , $i \in I$, linear unabhängig, so ist $\det Q \neq 0$ und

$$\hat{f} = -\frac{1}{\det Q} \begin{vmatrix} 0 & F_1 & \dots & F_n \\ \ell_1 & & & \\ \vdots & & Q & \\ \ell_n & & & \end{vmatrix}, \text{ sowie}$$

$$\|\hat{f}\| = -\frac{1}{\det Q} \begin{vmatrix} 0 & F_1 & \dots & F_n \\ \frac{0}{F_1} & & & \\ \vdots & & Q & \\ \frac{0}{F_n} & & & \end{vmatrix}.$$

Beweis: Sei $\hat{f} \in \mathcal{H}_0$. Dann ist $\hat{f} = \sum_{i=1}^n \xi_i \ell_i \in \mathcal{H}_0$ und $F_j = \langle \sum \xi_i \ell_i, \ell_j \rangle \Leftrightarrow \sum \xi_i \langle \ell_i, \ell_j \rangle = F_j \Leftrightarrow \xi Q = y$. Die Determinantendarstellung bekommt man mit der Cramerschen Regel. $\|\hat{f}\|^2 = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle =$

$$-\frac{1}{\det Q} \begin{vmatrix} 0 & F_1 & \dots & F_n \\ \langle \ell_1, \hat{f} \rangle & & & \\ \vdots & & Q & \\ \langle \ell_n, \hat{f} \rangle & & & \end{vmatrix} = -\frac{1}{\det Q} \begin{vmatrix} 0 & F_1 & \dots & F_n \\ \frac{0}{F_1} & & & \\ \vdots & & Q & \\ \frac{0}{F_n} & & & \end{vmatrix}. \quad \square$$

Korollar 8 Für das Interpolationsproblem des Korollars 6 mit $\Omega_0 = \{x_1, \dots, x_n\}$ ist $Q = (k(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$ und

$$\hat{f}(x) = -\frac{1}{\det Q} \begin{vmatrix} 0 & F_1 & \dots & F_n \\ k(x_1, x) & & & \\ \vdots & & Q & \\ k(x_n, x) & & & \end{vmatrix}.$$

Satz 16 Mit den Bezeichnungen von Korollar 7 gilt: Sei $f \in \mathcal{H}$ und $\langle f, \ell_i \rangle =: F_i$; ℓ_j seien linear unabhängig. Dann liefert \hat{f} die beste Approximation von f in \mathcal{H}_0 .

Beweis: Sei $\hat{f} = \sum_{j=1}^n \xi_j \ell_j \in \mathcal{H}_0$ zunächst beliebig. Dann ist $\|f - \hat{f}\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^n \xi_j \langle \ell_j, f \rangle - \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j \langle f, \ell_j \rangle + \sum_{j,k=1}^n \xi_j \bar{\xi}_k \langle \ell_j, \ell_k \rangle = \|f\|^2 - \xi y^* - y \xi^* + \xi Q \xi^*$ eine nichtnegative quadratische Form in $\xi \in \mathbb{K}^n$. Diese nimmt ein Minimum an und wird dort stationär: Es gilt $-y^* + Q \xi^* = 0$ und $-y + \xi Q = 0$, d.h. $\xi Q = y$. \square

Insbesondere ist die Interpolationsfunktion \hat{f} aus Korollar 8 die beste Approximation in $\text{span}\{K_{x_j}, j = 1, \dots, n\}$, für jede Funktion in \mathcal{H} mit denselben Werten bei x_1, \dots, x_n . Im Hinblick auf die Darstellung (2.2) eines beliebigen stetigen linearen Funktional L durch den Repräsentanten $\ell(x) = \overline{LK}_x$ ergibt sich folgende Aussage:

Korollar 9 Sei \mathcal{H} ein HmrK und $L \in \mathcal{H}^l$. Dann liefert die Formel

$$L_n(f) := \sum_{j=1}^n \xi_j f(x_j), \quad x_1, \dots, x_n \text{ fest}, \quad (4.1)$$

die beste Approximation für L , wenn L_n die (linear unabhängigen) Funktionen K_{x_j} , $j = 1, \dots, n$, exakt behandelt, d.h. wenn der Repräsentant ℓ_n von L_n bei x_j mit dem Repräsentanten ℓ von L übereinstimmt.

Beweis: $\|L_n - L\| = \|\ell_n - \ell\|$ wird minimal, wenn die Gewichte ξ_j in (4.1) so gewählt werden, daß ℓ_n die Funktion ℓ bei den x_j interpoliert. \square

Bemerkung 1 Man kann in (4.1) auch die freie Wahl der Stützstellen x_j zulassen. In diesem Fall wird der Fehler $\|f\|^2 - \xi y(x_k)^* - y(x_k) \xi^* + \xi Q(x_k) \xi^*$ stationär, wenn $y' = \xi Q'$ ist, also

$$\frac{d}{dx_k} \ell(x_k) = \frac{d}{dx_k} \ell_n(x_k), \text{ d.h. } L_n \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} K_{x_k} \right) = L \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} K_{x_k} \right) \quad (4.2)$$

gilt. Hierzu müssen die Voraussetzungen natürlich wesentlich verschärft werden: Neben der Differenzierbarkeit der Funktionen ist auch noch die Stetigkeit der Auswertungsfunktionale der Ableitungen zu fordern (vgl. Satz 8). Außerdem müssen die sich ergebenden optimalen Stützstellen verschieden, die zugehörigen Einsetzungsfunktionale für Funktionen und Ableitungen linear unabhängig sein. Genauere Angaben hierzu und Beispiele finden sich bei LARKIN [La] (zur Notation: $K(y, \bar{x})$ lese man als $k(x, y)$).

Wir gehen nun wieder von Korollar 7 aus und lassen n gegen ∞ gehen.

Satz 17 Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum, $\{\ell_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}$ und $F_i \in \mathbb{K}$, $i \in \mathbb{N}$, vorgegeben. $f_n \in \mathcal{H}$ seien die Elemente minimaler Norm mit $\langle f_n, \ell_i \rangle = F_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{H}$ mit $\langle f, \ell_i \rangle = F_i$, $i \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = M < \infty$ ist. Die Lösung \hat{f} mit minimaler Norm ist eindeutig bestimmt, $\hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ und $\|\hat{f}\| = M$.

Beweis: $f_n = \sum_{j=1}^n c_j \ell_j$ (Korollar 7) und $\langle f_n, f_m \rangle = \sum_{j=1}^n c_j \langle \ell_j, f_m \rangle \stackrel{m \geq n}{=} \sum_{j=1}^n c_j \bar{F}_j = \sum_{j=1}^n c_j \langle \ell_j, f_n \rangle = \langle f_n, f_n \rangle = \|f_n\|^2$ für $m \geq n$.

1. Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = M < \infty$. Dann folgt $\|f_n - f_m\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f_m\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle f_n, f_m \rangle = \|\|f_n\|^2 - \|f_m\|^2\|$. Da die Normenfolge eine Cauchyfolge ist, gilt dies also auch für die Folge $\{f_n\}$ selbst. Sie konvergiert gegen ein $f \in \mathcal{H}$. $\langle f, \ell_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \ell_i \rangle = F_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
2. Gebe es umgekehrt ein $f \in \mathcal{H}$ mit $\langle f, \ell_i \rangle = F_i$, so folgt $\|f\| \leq \|f_2\| \leq \dots \leq \|f_n\|$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = M < \infty$.
3. Sei f wie oben, $\hat{f} \in \mathcal{H}$, $\langle \hat{f}, \ell_i \rangle = F_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\|\hat{f}\|$ minimal. Dann ist für alle $i \in \mathbb{N}$ $\langle f - \hat{f}, \ell_i \rangle = 0$. Wegen $f_n = \sum c_j \ell_j$ und $f_n \rightarrow f$ folgt $\langle f - \hat{f}, f \rangle = 0$. Damit gilt $\|\hat{f}\|^2 = \|f - (f - \hat{f})\|^2 = \|f\|^2 + \|f - \hat{f}\|^2 \stackrel{!}{\leq} \|f\|^2$. Es ist notwendig $\hat{f} = f$. \square

Eine Darstellung für \hat{f} als Grenzwert bekommt man unmittelbar aus Korollar 7. In einem HmrK hat man wie üblich punktweise Konvergenz:

Korollar 10 Sei \mathcal{H} ein HmrK, $Q_n = (\langle \ell_i, \ell_j \rangle)_{i,j=1}^n$. Dann ist

$$\hat{f}(x) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\det Q_n} \begin{vmatrix} 0 & F_1 & \dots & F_n \\ \ell_1(x) & & & \\ \vdots & & Q_n & \\ \ell_n(x) & & & \end{vmatrix}$$

mit gleichmäßiger Konvergenz in jeder Menge, in der $\kappa(x) = k(x, x)$ beschränkt ist.

$$\|\hat{f}\|^2 = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\det Q_n} \begin{vmatrix} 0 & \overline{F_1} & \dots & \overline{F_n} \\ F_1 & & & \\ \vdots & & Q_n & \\ F_n & & & \end{vmatrix}.$$

Für das Interpolationsproblem bekommt man die entsprechende Aussage mit $\ell_i = K_{x_i}$.

Wir betrachten nun ein etwas längeres

Beispiel 6 (NASHED & WAHBA, vgl. [NW], hier etwas verkürzt wiedergegeben)

Seien B und Ω geeignete Mengen, $\mathcal{H} = L^2(B)$, $(f, g) := \int_B f(x) \overline{g(x)} dx$ und $G(x, y)$ eine Funktion auf $\Omega \times B$ mit $g_x := G(x, \cdot) \in L^2(B)$ für alle $x \in \Omega$. Dann ist $p \in L^2(B) \mapsto (p, g_x)$ ein stetiges lineares „Einsetzfunktional“ für jedes $x \in \Omega$.

$$G : L^2(B) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}), (Gp)(x) = (p, g_x) = \int_B p(t) \overline{G(x, t)},$$

ist ein stetiger linearer Operator. Mit $N := \ker G = \{p \in L^2(B) : (p, g_x) = 0 \text{ für alle } x \in \Omega\}$ bekommt man wie in Satz 12 einen HmrK $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}/N \cong M := \overline{\operatorname{span}\{g_x : x \in \Omega\}}$ mit Kernfunktion $k(x, y) = (g_x, g_y) = \int_B G(x, t) \overline{G(y, t)} dt$.

Sei nun ein $F \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$ vorgegeben und eine Lösung $p \in L^2(B)$ der Gleichung

$$Gp = F, \text{ d.h. } \int_B p(t) \overline{G(x, t)} dt = F(x), x \in \Omega, \quad (4.3)$$

mit minimaler Norm gesucht.

Falls $F \in G(L^2(B))$ ist, d.h. eine Lösung p_0 von (4.3) mit minimaler Norm existiert, so gibt es auch eine Minimum-Norm-Lösung p_∞ auf jeder Menge $\Omega_\infty = \{x_n \in \Omega : n \in \mathbb{N}\}$ und Minimum-Norm-Lösungen p_n auf $\Omega_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Ist weiterhin Ω_∞ dicht in Ω , $k(x, x)$ lokal beschränkt und $k(x, y)$ — und damit jedes $x \mapsto (p, g_x)$ — stetig, so ist Ω_∞ Eindeutigkeitsbereich für $\hat{\mathcal{H}}$, $p_0 = p_\infty$ und $p_n \rightarrow p_0$ punktweise und in der Norm. Besitzt die Gleichung umgekehrt nicht einmal auf Ω_∞ eine Lösung, so gilt notwendig $\|p_n\| \rightarrow \infty$ für die auf Ω_n diskretisierten Lösungen p_n .

NASHED & WAHBA leiten in [NW] Aussagen über die Größenordnung des Approximationsfehlers $\|p_0 - p_n\|$ unter gewissen Glattheitsvoraussetzungen an k her.

Sei nun $G(x, y)$ ein Hilbert-Schmidt-Kern. Dann kann man $G : p(x) \mapsto (Gp)(x) = (p, g_x)$ auch als einen (kompakten) Operator von $L^2(B)$ nach $L^2(\Omega)$ betrachten. Der Operator $Q = G^*G :$

$L^2(B) \rightarrow L^2(B)$ ist ebenfalls kompakt und selbstadjungiert. Er hat den Integralkern $Q(x, y) = \int_{\Omega} G(t, x)G(t, y) dt$; $q_x := Q(x, \cdot)$ gehört für alle $x \in B$ zu $L^2(B)$. Man kann das obige Verfahren auf die stetigen „Einsetzungsfunktionale“ $p \mapsto (p, q_x)$ anwenden. Die zu (4.3) analoge Gleichung lautet jetzt

$$Qp = G^*Gp \stackrel{!}{=} G^*F. \quad (4.4)$$

Diese Gleichung ist für alle $G^*F \in Q(L^2(B))$, d.h. $F \in G(L^2(B)) \oplus G(L^2(B))^{\perp}$ lösbar. Jede Lösung p ist gleichzeitig Lösung der Aufgabe

$$\|Gp - F\|_{\Omega} \rightarrow \min, \quad (4.5)$$

also kleinste-Fehlerquadrat-Lösung von (4.3). Eine Minimum-Norm-Lösung von (4.4) minimiert den Ausdruck

$$\|p\|_B + \|Gp - F\|_{\Omega}.$$

Es ist zu beachten, daß der Bildbereich von G (bzw. Q) i.a. in $L^2(\Omega)$ (bzw. $L^2(B)$) nicht abgeschlossen ist. Die kanonische Injektion von G wirkt aber als lineare Isometrie zwischen dem HmrK $\widehat{\mathcal{H}}$, welcher wiederum normisomorph zum abgeschlossenen Teilraum $M \subset L^2(B)$ ist, und $G(L^2(B))$. Entsprechendes gilt für Q .

Literatur zu den letzten beiden Paragraphen:

1. CHALMERS [Ch]
2. H. SHAPIRO [Sh, Seiten 81–107]
3. F.M. LARKIN [La]
4. M.Z. NASHED & GRACE WAHBA [NW].

Kapitel 5

Hilberträume als Wertebereich

Wir verallgemeinern nun das Konzept des vorigen Abschnitts und betrachten „hilbertraumwertige Funktionen“, d.h. Abbildungen einer Menge Ω in einen Hilbertraum W . Diese Abbildungen sollen selbst wieder einen Hilbertraum \mathcal{H} bilden. Das Skalarprodukt in W werde mit $[\cdot, \cdot]$ bezeichnet, dasjenige in \mathcal{H} weiterhin mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Man hat jetzt lineare Einsetzoperatoren $e_x : \mathcal{H} \rightarrow W$, $f \mapsto f(x) = e_x f \in W$ für jedes $x \in \Omega$. Im Falle stetiger Einsetzoperatoren gibt es zu jedem $e_x \in \Omega' \subset L(\mathcal{H}, W)$ genau einen adjungierten Operator $K_x \in L(W, \mathcal{H})$ mit

$$[f(x), \xi] = \langle f, K_x \xi \rangle \quad (5.1)$$

für alle $f \in \mathcal{H}$ und $\xi \in W$. Falls weiterhin Ω Eindeutigkeitsbereich für \mathcal{H} ist, d.h. aus $f(x) = 0 \in W$ für alle $x \in \Omega$ bereits $f = 0$ folgt, dann heißt \mathcal{H} ein *W-Hilbertraum mit reproduzierendem Kern*.

Analog zu Proposition 6 ist $\mathcal{H} = \overline{\text{span}\{K_x \xi, x \in \Omega, \xi \in W\}}$. Die Abbildung $k(x, y) : W \rightarrow W$, $\xi \mapsto K_x \xi(y) = (e_y \circ K_x) \xi$ ist stetig und linear. Es gilt $k(x, y)^* = (e_y \circ K_x)^* = (e_x \circ K_y) = k(y, x)$. $k(x, x)$ ist selbstadjungiert.

$k(x, y)$ induziert eine Sesquilinearform ${}_x[\xi, \zeta]_y = [k(x, y)\xi, \zeta] = \langle K_x \xi, K_y \zeta \rangle$ auf W . Für $x = y$ ist sie hermitesch und positiv semidefinit. Sie ist positiv, falls K_x (und damit $k(x, x)$) injektiv ist. $k(x, x)$ besitzt einen Wurzeloperator $k(x, x)^{1/2}$ mit ${}_x[k(x, x)\xi, \zeta] = [k(x, x)^{1/2}\xi, k(x, x)^{1/2}\zeta]$. Es ist $\|k(x, x)^{1/2}\xi\|_W = \|K_x \xi\|_{\mathcal{H}}$ und damit $\|k(x, x)^{1/2}\|_{\text{tub}} = \|K_x\|_{\text{tub}}$. Aus $\kappa(x) := \|K_x\|^2 = 0$ folgt $f(x) = 0$ für alle $f \in \mathcal{H}$. Es gilt $\|f(x)\|^2 = [f(x), f(x)] = \langle f, K_x f(x) \rangle \leq \|f\| \sqrt{\kappa(x)} \|f(x)\|$, also

$$\|f(x)\|^2 \leq \|f\|^2 \kappa(x). \quad (5.2)$$

Auch hier konvergiert jede Cauchyfolge in \mathcal{H} auf einer Menge, auf der κ beschränkt ist, gleichmäßig punktweise in W .

Sei \mathcal{H} separabel mit einem vollständigen Orthonormalsystem $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\langle K_x \xi, \varphi_i \rangle = [\xi, \varphi_i(x)]$ und ${}_x[k(x, y)\xi, \zeta] = \langle K_x \xi, K_y \zeta \rangle = \langle \sum_{i=1}^{\infty} [\xi, \varphi_i(x)] \varphi_i, K_y \zeta \rangle = [\sum_{i=1}^{\infty} [\xi, \varphi_i(x)] \varphi_i, \zeta]$. Es sei $\varphi_i(x)^* : \xi \mapsto [\xi, \varphi_i(x)]$. Damit ist

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y) \varphi_i(x)^*. \quad (5.3)$$

Diese Operatorreihe konvergiert punktweise (d.h. für jedes $\xi \in W$) schwach. Es gilt auch ein Analogon zu Proposition 9, die Beziehung (2.5) lautet hier

$$g(f)(x_g) = J_g(x) f(x), \quad (5.4)$$

wobei $J_g(x)$ jetzt ein linearer Homöomorphismus von W ist.

Satz 18

1. Für beliebige $x_i \in \Omega$, $\xi_i \in W$, $i = 1, \dots, n$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^n [k(x_i, x_j)\xi, \zeta] \geq 0 \quad (5.5)$$

und „ $>$ “ falls die $K_{x_i}\xi_i$ linear unabhängig sind.

2. Sei W ein Hilbertraum, Ω eine Menge und für je zwei Punkte $x, y \in \Omega$ sei $k(x, y) : W \rightarrow W$ stetig und linear, $k(x, y)^* = k(y, x)$. Für beliebige $x_i \in \Omega$ und linear unabhängige $\xi_i \in W$, $i = 1, \dots, n$, sei

$$\sum_{i,j=1}^n [k(x_i, x_j)\xi_i, \xi_j] \geq 0. \quad (5.6)$$

Dann gibt es einen W -HmrK über Ω mit Einsetzoperatoren e_x und $k(x, y) = e_y \circ (e_x)^*$.

Beweis:

1. Wie im Beweis von Proposition 10 setzt man $f = \sum_{i=1}^n K_{x_i}\xi_i$.
2. Der Beweis entspricht weitgehend demjenigen von Satz 9.

$$A : W^n \rightarrow W^n, \xi = (\xi_j)_{j=1}^n \mapsto \left(\sum_{i=1}^n (k(x_i, x_j)\xi_i) \right)_{j=1}^n$$

werde als (selbstadjungierter und positiv semidefiniter) Operator im Hilbertraum W^n mit dem Skalarprodukt $[\xi, \zeta]_n := \sum_{j=1}^n [\xi_j, \zeta_j]$ betrachtet. Für festes $x \in \Omega$ und $\xi \in W$ ist $K_x\xi(y) := k(x, y)\xi$ eine Abbildung (in y) von Ω nach W . Der Raum $\mathcal{L} = \text{span}\{K_x\xi, x \in \Omega, \xi \in W\}$ wird mit dem Skalarprodukt $\langle K_x\xi, K_y\zeta \rangle := [k(x, y)\xi, \zeta]$ ausgestattet und vervollständigt. Auf diese Weise bekommt man wieder einen Hilbertraum mit der im Satz geforderten Eigenschaft. \square

Proposition 12 Sei $\xi \in W$ fest, $N := \{K_x\xi, x \in \Omega\}^\perp = \{f : [f(x), \xi] = 0\}$. Dann ist der Hilbertraum $\mathcal{H}_\xi = \mathcal{H}/N$ mit den stetigen Einsetzfunktionalen $f \mapsto [f(x), \xi] \in \mathbb{K}$ ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern im bisherigen Sinn. $K_x\xi$ ist sein reproduzierendes Element bei $x \in \Omega$ und $k_\xi(x, y) = \langle K_x\xi, K_y\xi \rangle = [k(x, y)\xi, \xi]$ ist die Kernfunktion.

Damit lassen sich die früheren Ergebnisse zumindest auf die „Auswertung von f in einer festen Richtung ξ “ übertragen, sie gelten also „schwach“.

In einem endlich dimensionalen Raum $W = \mathbb{K}^n$ ist $[\xi, \zeta]$ das übliche Skalarprodukt zweier (Spalten-)Vektoren. $K_x = (K_x^{(1)}, \dots, K_x^{(n)})$ kann als ein n -Zeilenvektor aus Elementen von \mathcal{H} , die jeweils die j -te Komponente reproduzieren, aufgefaßt werden: $\langle f, K_x\xi \rangle = (f_1(x), \dots, f_n(x))\xi$, d.h. mit dem j -ten Einheitsvektor $\xi = e_j$: $\langle f, K_x^{(j)} \rangle = f_j(x)$.

$k(x, y) = \left(K_x^{(j)} k(y) \right)_{j,k=1}^n$ ist eine $n \times n$ -Matrix, $k(x, x)$ ist hermitesch und positiv semidefinit, die Summanden $\varphi_i(y)\varphi_i(x)^*$ in (5.3) sind Rang-1-Matrizen.

Teil II

Räume integrierbarer holomorpher Funktionen

Kapitel 6

Die Räume \mathcal{L}^p

Sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Menge

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \text{ meßbar und } \sigma(f) := \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu} < \infty\} \quad (6.1)$$

ein linearer Funktionenraum mit Halbnorm σ , welche allerdings keine hausdorffsche Topologie erzeugt. Die Menge $N := \{f : \sigma(f) = 0\}$ ist ein (bezüglich der Halbnorm σ abgeschlossener) linearer Teilraum. Im Quotientenraum $\mathcal{L}^p(\Omega) := L^p(\Omega)/N$ wird

$$\|\hat{f}\| := \sigma(f), \text{ für ein (also jedes) } f \in \hat{f} = f + N \quad (6.2)$$

zu einer Norm, die \mathcal{L}^p zu einem Banachraum macht.

Es stellt sich nun die Frage, ob man auf \mathcal{L}^p stetige Einsetzungsfunktionale definieren kann, die im Sinne von (1.1) verträglich mit der Funktionenraumstruktur von L^p sind. Die Antwort hierauf ist i.a. negativ:

Satz 19 Sei Ω ein Maßraum, $\mu(\Omega) > 0$. Sei weiterhin $1 < p < \infty$ und T ein Teilraum von $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ mögen eine abzählbare Überdeckung $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$ und ihr untergeordnete meßbare Funktionen $g_n \in T$ mit $g_n \equiv 1$ auf Q_n und Träger S_n vom Maß $\leq \varepsilon$ existieren. Dann läßt T keine stetigen linearen Einsetzungsfunktionale zu.

Beweis: Sei $N \in \mathbb{N}$ zunächst fest, $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Überdeckung von Ω mit $\mu(S_n) \leq \varepsilon = N^{-p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$f_n := N \cdot g_n, n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist f_n meßbar und $\|f_n\|^p \leq \int_{S_n} N^p d\mu \leq \varepsilon N^p = 1$, also $f_n \in L^p$. Seien $e_x : \hat{f} \in T \mapsto \hat{f}(x) \in \mathbb{K}$ stetige Einsetzungsfunktionale mit $\hat{f}(x) = f(x)$ in Ω für jeweils einen festen Repräsentanten $f \in \hat{f}$. Mit der Schrankenfunktion $\kappa(x) = \|e_x\|^2 < \infty$ bekommt man:

$$\begin{aligned} \mu(\Omega) &= \mu\left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \{x \in \Omega : \kappa(x) < N^2\}\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in Q_n : \kappa(x) < N^2\}\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in Q_n : |\hat{f}_n(x)| < N\}\right), \quad \text{denn } |\hat{f}_n(x)|^2 \leq \kappa(x) \\ &= 0, \quad \text{denn } \hat{f}_n(x) = f_n(x) = N \text{ fast überall in } Q_n. \end{aligned}$$

□

Im Gesamttraum $\mathcal{L}^p(\Omega)$ kann man für g_n , die Indikatoren χ_{Q_n} meßbarer Mengen Q_n , nehmen. Die Voraussetzung des Satzes fordert dann, daß es eine abzählbare Überdeckung mit Mengen vom Maß $\leq \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ gibt.

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ bilden die $\|\cdot\|_\infty$ -Umgebungen $U_\delta(x_k)$, $\delta = \sqrt[m]{\varepsilon}/2$, einer abzählbaren dichten Menge $\{x_k\} \subset \Omega$ eine solche Überdeckung. Wenn T alle C^∞ -Funktionen enthält, gibt es $g_k \in C^\infty(\Omega) \subset T$ mit $g_k \equiv 1$ in $U_{\delta/2}(x_k)$ und Träger in $U_\delta(x_k)$.

Um in Teilräumen des L^p stetige Einsetzungsfunktionale zu bekommen, muß man sich also erheblich einschränken. Die obigen Überlegungen lassen vermuten, daß am ehesten Räume von analytischen Funktionen infrage kommen. Dies wird sich im nächsten Paragraphen bestätigen.

Kapitel 7

Die Bergmansche Kernfunktion

Für die nächsten Paragraphen treffen wir folgende **Vereinbarung**: Die Menge $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ trage die durch die beiden Karten

$$\varphi_1 = id : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ und } \varphi_2 : \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{z}, \infty \mapsto 0$$

gegebene topologische und analytische Struktur. Eine Funktion f heißt in einem Punkt $z \in \mathbb{C}$ holomorph, wenn sie in einer Umgebung überall komplex differenzierbar ist; falls die Ableitung nicht verschwindet, spricht man von einer lokalkonformen Abbildung. f heißt bei ∞ holomorph, wenn $f \circ \varphi_2$ bei 0 holomorph ist. Eine Abbildung f zwischen zwei Teilmengen von $\bar{\mathbb{C}}$ heißt konform, wenn sie ein analytischer Diffeomorphismus, d.h. bijektiv und f bzw. $\varphi_2 \circ f$ in beiden Richtungen holomorph ist. Einige klassische Ergebnisse über konforme Abbildungen werden in Kapitel 10 angegeben.

Sei $\Omega \subset \bar{\mathbb{C}}$ und $L_B^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ der Raum der in Ω holomorphen und quadratisch integrierbaren Funktionen. $L_B^2(\Omega)$ ist ein komplexer Vektorraum. Aus $\|f\|^2 = \int_{\Omega} |f(z)|^2 dz = 0$ folgt $f \equiv 0$ in Ω , da der Integrand stetig und nichtnegativ ist. $L_B^2(\Omega)$ ist also ein normierter Funktionenraum. Das obige Integral ist ein monotonies Mengenfunktional, man hat

Proposition 13 Sei $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Dann ist $\|f\|_{\Omega_1} \leq \|f\|_{\Omega_2}$ für alle $f \in L_B^2(\Omega_2)$ und $L_B^2(\Omega_2) \subset L_B^2(\Omega_1)$ ist eine stetige Inklusion.

Wir wollen im folgenden vor allem Gebiete, d.h. zusammenhängende offene Mengen Ω in $\bar{\mathbb{C}}$ betrachten. Bei nicht offenem Ω werden die Einsetzungsfunktionale stets nur im Inneren von Ω betrachtet, die Holomorphieforderung setzt aber die komplexe Differenzierbarkeit in einer (von der Funktion abhängigen) offenen Obermenge voraus.

Satz 20 $L_B^2(\Omega)$ besitzt stetige Einsetzungsfunktionale. Auch für sämtliche Ableitungen sind die Einsetzungsfunktionale $f \mapsto f^{(k)}(z)$ stetig. Die Schrankenfunktion κ ist auf kompakten Teilmengen von Ω beschränkt.

Beweis: Sei $z \in \Omega$. Da Ω offen ist, gibt es einen Kreis D_ε um z , der ganz in Ω liegt. Man kann für ε die Entfernung von z zum Rand von Ω wählen. In D_ε läßt sich jedes $f \in L_B^2(\Omega)$ in eine Potenzreihe entwickeln:

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\zeta - z)^k, \alpha_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z) \quad (7.1)$$

Man kann die Norm von f abschätzen:

$$\|f\|^2 = \int_{\Omega} |f(\zeta)|^2 d\zeta \geq \int_{D_\varepsilon} |f(\zeta)|^2 d\zeta =: \|f\|_{D_\varepsilon}^2 \quad (7.2)$$

Mit (7.1) gilt in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \|f\|_{D_\varepsilon}^2 &= \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \rho^k e^{i\varphi k} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\alpha_k} \rho^k e^{-i\varphi k} \right) \rho d\varphi d\rho \\ &= \int_0^\varepsilon \sum_{k,j=0}^{\infty} \alpha_k \overline{\alpha_j} \rho^{k+j+1} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(k-j)} d\varphi d\rho \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$= 2\pi \int_0^\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \rho^{2k+1} d\rho \quad (7.4)$$

$$= \pi \sum_{k=0}^{\infty} |f^{(k)}(z)|^2 \frac{\varepsilon^{2k+2}}{k!(k+1)!}. \quad (7.5)$$

Dabei wurde in (7.3) die absolute Konvergenz der Potenzreihe und die daraus folgende gleichmäßige Konvergenz der ausmultiplizierten Reihe in φ benutzt. Der letzte Schritt legitimiert sich aus der monotonen Konvergenz des Integranden in (7.4). (7.2) und (7.5) ergeben zusammen

$$|f^{(k)}(z)|^2 \leq \|f\|^2 \frac{k!(k+1)!}{\pi \text{dist}(z, \partial\Omega)^{2k+2}}. \quad (7.6)$$

Insbesondere gilt für $k = 0$:

$$\kappa(z) \leq \frac{1}{\pi \text{dist}(z, \partial\Omega)^2}, \quad (7.7)$$

wobei die rechte Seite auf kompakten Mengen in Ω beschränkt ist. \square

Korollar 11 Sei Ω beschränkt und $p \geq 2$. Dann ist $L_B^p(\Omega)$, der Raum der im Betrag p -integrierbaren holomorphen Funktionen, ebenfalls ein Funktionenraum mit stetigen Einsetzfunktionalen.

Beweis: Mit der Hölderungleichung angewandt auf $|f|^2 \cdot 1$ bekommt man $\|f\|_2 \leq |\Omega|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \|f\|_p$, d.h. $L_B^p(\Omega) \subset L_B^2(\Omega)$ ist eine stetige Inklusion. \square

Korollar 12 Sei z ein isolierter Randpunkt von Ω . Dann ist $L_B^2(\Omega) = L_B^2(\Omega \cup \{z\})$.

Beweis: Sei $f \in L_B^2(\Omega)$. Dann ist z isolierte Singularität von f . Man kann f in einem Kreisring $A = \{w : 0 < |w - z| < R\}$ in eine Laurentreihe entwickeln. Analog zu (7.4) ist $\|f\|_A^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 \int_0^R \rho^{2k+1} d\rho$. Dies ist nur endlich, wenn $\alpha_k = 0$ ist für alle $k < 0$. f hat also bei z_0 eine hebbare Singularität und kann holomorph fortgesetzt werden. Außerdem ist $\|f\|_\Omega = \|f\|_{\Omega \cup \{z\}}$. \square

Korollar 13 Sei Ω ein Gebiet, dessen Rand nur isolierte Häufungspunkte (in $\bar{\mathbb{C}}$) besitzt. Dann ist $L_B^2(\Omega) = 0$.

Beweis: $\bar{\mathbb{C}}$ ist kompakt, also sind alle holomorphen Funktionen konstant. Da $\bar{\mathbb{C}}$ unendliches Maß besitzt, ist nur die Nullfunktion auch quadratisch integrierbar. Es folgt $L_B^2(\bar{\mathbb{C}}) = 0$. Sei Q_1 die Menge der isolierten Randpunkte von Ω . Dann ist nach dem letzten Korollar $L_B^2(\Omega) = L_B^2(\Omega \cup Q_1)$. Die Menge Q_2 der Häufungspunkte des Randes ist nach Voraussetzung eine diskrete Menge von Randpunkten des Gebiets $\Omega \cup Q_1$, also gilt weiter $L_B^2(\Omega \cup Q_1) = L_B^2(\Omega \cup Q_1 \cup Q_2) = L_B^2(\bar{\mathbb{C}}) = 0$. \square

Satz 21 $L_B^2(\Omega)$ ist Hilbertraum.

Beweis: Sei $\{f_n\}$ eine Cauchyfolge in $L_B^2(\Omega)$. Nach Satz 20 und Proposition 4 konvergiert $\{f_n\}$ punktweise und auf kompakten Teilmengen von Ω gleichmäßig gegen eine somit in Ω holomorphe Funktion f . Für $\varepsilon > 0$ sei $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ für $n, m > n_0(\varepsilon)$. K_v sei eine kompakte Ausschöpfung von Ω . Dann ist $\int_{K_v} |f_n(z) - f_m(z)|^2 dz < \varepsilon^2$ für alle $v \in \mathbb{N}$, also für $m \rightarrow \infty$: $\int_{K_v} |f_n(z) - f(z)|^2 dz \leq \varepsilon^2$. Die Funktionenfolge $\varphi_{v,n}(z) := |f_n(z) - f(z)|^2 \cdot \chi(K_v)$ konvergiert in v punktweise monoton, man kann also v gegen ∞ gehen lassen und bekommt schließlich $\int_\Omega |f_n(z) - f(z)|^2 dz \leq \varepsilon^2$ für $n > n_0(\varepsilon)$. $\{f_n\}$ konvergiert in $L_B^2(\Omega)$ gegen f . \square

Definition 5 Die reproduzierende Kernfunktion $k_B(z, w)$ des Raums $L_B^2(\Omega)$ heißt Bergmansche Kernfunktion des Gebiets Ω .

Der Beweis des letzten Satzes zeigt, daß auch jeder Teilraum, der gegen die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen auf Kompakta abgeschlossen ist, selbst vollständig, d.h. abgeschlossen in $L_B^2(\Omega)$ ist. Dies gilt insbesondere für den Raum $L_{[B]}^2(\Omega)$ der in Ω schlichten oder konstanten Funktionen und für den Raum $L_{(B)}^2(\Omega)$ der Funktionen mit einer (in Ω holomorphen, eindeutigen) Stammfunktion. Im ersten Fall folgt dies aus dem Satz von Hurwitz, im zweiten Fall aus dem

Lemma 2 Sei $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine auf kompakten Teilmengen gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergierende Folge im Gebiet Ω holomorpher Funktionen, $\{F_n\}$ eine Folge von Stammfunktionen. Es sei $F_n(\zeta) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein festes $\zeta \in \Omega$. Dann konvergiert $\{F_n\}$ auf Kompakta in Ω gleichmäßig gegen die Stammfunktion F von f .

Beweis: Sei K eine kompakte zusammenhängende Teilmenge von Ω , η ein fester Punkt in K und γ ein Weg in Ω , der ζ und η verbindet. Dann konvergiert f_n auf dem Kompaktum $K \cup \gamma$ gleichmäßig gegen f und folglich das Integral $\int_{\zeta}^w f_n(z) dz = F_n(w)$ gleichmäßig gegen $\int_{\zeta}^w f(z) dz = F(w)$, wobei über einen in $K \cup \gamma$ gelegenen (und damit jeden) Weg zwischen ζ und w integriert werden kann. \square

Für einfach zusammenhängendes Ω sind natürlich $L_B^2(\Omega)$ und $L_{(B)}^2(\Omega)$ identisch.

Korollar 14 Die Funktion

$$K_{z_0}^{(n)}(w) := \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} k_B(z, w) \Big|_{z=z_0} \in L_B^2(\Omega) \quad (7.8)$$

reproduziert die n -te Ableitung der Funktionen in $L_B^2(\Omega)$ an der Stelle z_0 .

Beweis: Nach Satz 20 ist die Auswertung der n -ten Ableitung bei $z_0 \in \Omega$ ein stetiges lineares Funktional. Aus Satz 8 folgt dann die Behauptung. \square

Bemerkung 2 $k_B(z, w)$ ist als Funktion des zweiten Arguments w holomorph, als Funktion des ersten Arguments z aber antiholomorph: $\frac{\partial}{\partial z} k_B(z, w) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} k_B(w, z) = 0$. In der Literatur bezeichnet man als Kernfunktion manchmal auch die in beiden Argumenten holomorphe Funktion $\tilde{k}(z, w) := k_B(\bar{z}, w)$.

Satz 22 Sei $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ eine konforme Abbildung. Dann ist

$$i_F : L_B^2(\Omega_1) \rightarrow L_B^2(\Omega_2), f_1 \mapsto f_2, f_2(F(z)) := F'(z)^{-1} f_1(z) \quad (7.9)$$

eine Normisomorphie.

Beweis: Die Funktionaldeterminante von F , aufgefaßt als reelle Transformation, ist $|F'(z)|^2$. Für $f_1 \in L_B^2(\Omega_1)$ gilt $\int_{\Omega_2} |f_2(w)|^2 dw = \int_{\Omega_1} |f_2(F(z))|^2 |F'(z)|^2 dz = \int_{\Omega_1} |f_1(z)|^2 dz$. Außerdem ist die Abbildung i_F bijektiv und linear. \square

Gehört ∞ zu Ω , so haben dort notwendig alle $f \in L_B^2(\Omega)$ eine doppelte Nullstelle, denn $-\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$ muß dann über eine Umgebung von 0 integrierbar sein. Es ist stets $\kappa(\infty) = 0$. Aus dem Satz folgt für die darstellenden Elemente der Einsetzungsfunktionale:

Korollar 15 Ist k_i die Bergmansche Kernfunktion des Gebiets Ω_i , $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ konform, so gilt

$$k_1(z, w) = \overline{F'(z)} k_2(F(z), F(w)) F'(w). \quad (7.10)$$

Insbesondere operiert die Gruppe $\text{Aut}(\Omega)$ der (konformen) Automorphismen von Ω auf der Gruppe der Isometrien von $L_B^2(\Omega)$ vermöge der Beziehung (2.5), wobei J_g die komplexe Ableitung der zugehörigen konformen Transformation ist. Falls $\text{Aut}(\Omega)$ transitiv auf Ω operiert, d.h. für ein — und damit jedes — $v \in \Omega$ gilt: $\text{Aut}(\Omega)v = \Omega$, dann genügt es, $k_B(v, z)$ für alle $z \in \Omega$ zu kennen. Da Drehungen konforme Abbildungen mit konstanter Ableitung vom Betrag 1 sind, folgt aus der Drehinvarianz des Gebiets Ω zum Zentrum ζ die analoge Drehinvarianz von K_ζ , d.h. $e^{i\alpha} \cdot \Omega = \Omega \Rightarrow K_\zeta(z) \equiv K_\zeta(e^{i\alpha}z)$.

Proposition 14 Die Bergmansche Kernfunktion des Einheitskreises \mathbb{ID} ist

$$k_B(z, w) = \frac{1}{\pi(1 - \bar{z}w)}. \quad (7.11)$$

Beweis: $L_B^2(\mathbb{ID})$ enthält zumindest alle Konstanten. Der Kreis ist drehinvariant um 0, also ist K_0 längs konzentrischer Kreise und folglich in ganz \mathbb{ID} konstant. Wegen $\int_{\mathbb{ID}} 1 \cdot \frac{1}{\pi} dz = 1$ folgt notwendig $K_0 \equiv \frac{1}{\pi}$. Die Gruppe der Automorphismen $A_z(w) = \frac{w-z}{1-\bar{z}w}$, $w \in \mathbb{ID}$, operiert transitiv auf dem Einheitskreis: $A_z(z) = 0$. Weiterhin ist $A_z'(w) = \frac{(1-\bar{z}w) + (w-z)\bar{z}}{(1-\bar{z}w)^2} = \frac{1-|z|^2}{(1-\bar{z}w)^2}$. Aus Korollar 15 folgt $k_B(z, w) = A_z'(w)\overline{A_z'(z)} \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi(1-\bar{z}w)^2}$. \square

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz (Satz 31) kann man jedes von der (evtl. punktierten) ergänzten Ebene verschiedene einfach zusammenhängende Gebiet auf den Einheitskreis konform abbilden. Für diese Gebietsklasse genügt es weitgehend, den Repräsentanten \mathbb{ID} zu betrachten.

Korollar 16 Sei Ω ein Gebiet der Kreisklasse, $F : \Omega \rightarrow \mathbb{ID}$ konform. Dann ist

$$k_B(z, w) = \frac{\overline{F'(z)}F'(w)}{\pi(1 - \overline{F(z)}F(w))^2}, \quad (7.12)$$

$$\text{und} \quad F_w(z) = \sqrt{\frac{\pi}{k_B(w, w)}} \int_w^z k_B(w, \zeta) d\zeta \quad (7.13)$$

ist die konforme Abbildung von Ω auf \mathbb{ID} , normiert durch $F_w(w) = 0$ und $F_w'(w) > 0$ (und reell).

Die Transformation $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ bildet die obere Halbebene $\{z : \text{Im} z > 0\}$ auf den Einheitskreis ab. Die Bergmansche Kernfunktion und die Schrankenfunktion ergeben sich nach kurzer Rechnung als

$$k_B(z, w) = \frac{-1}{\pi(\bar{z}-w)} \quad \text{und} \quad \kappa(z) = \frac{1}{4\pi(\text{Im} z)^2}. \quad (7.14)$$

Bemerkung 3 Ist $G(w, z)$ die Greensche Funktion des Gebiets Ω der Kreisklasse, so gilt

$$G(w, z) = \log |F_w(z)| = \frac{\log \pi - \log \kappa(w)}{2} \log \left| \int_w^z k_B(w, \zeta) d\zeta \right|. \quad (7.15)$$

Zu jedem Gebiet Ω in $\bar{\mathbb{C}}$ gibt es bekanntlich eine Funktion, die genau auf Ω holomorph ist. Andererseits zeigt Korollar 12, daß selbst topologisch wesentlich verschiedene Gebiete denselben L_B^2 haben können. Für einfach zusammenhängende Gebiete gilt:

Korollar 17 Die Bergmanschen Kernfunktionen zweier verschiedener einfach zusammenhängender Gebiete Ω_1 und Ω_2 mit einem gemeinsamen Punkt w sind in $\Omega_3 := \Omega_1 \cap \Omega_2$ nicht identisch. Unterscheiden sich die beiden Gebiete zudem nur um eine Nullmenge, so sind $L_B^2(\Omega_1)$ und $L_B^2(\Omega_2)$ (genauer die Einschränkungen auf Ω_3) verschieden.

Beweis: Sind die Kernfunktionen identisch, so sind es auch die in w normierten konformen Kreisabbildungen (zunächst in Ω_3 , dann aber stimmen die Umkehrungen in ganz \mathbb{ID} überein), also folgt $\Omega_1 = \Omega_2$. Sind die Einschränkungen der beiden HmrK auf Ω_3 gleich, so besteht über die Funktionswerte auf dem Eindeutigkeitsbereich Ω_3 eine lineare Isomorphie zwischen den HmrK, welche zu einer Normisomorphie wird, wenn die beiden Mengen sich nur um eine Nullmenge unterscheiden. Dann aber müßten notwendig auch die Kernfunktionen übereinstimmen. \square

Korollar 18 Falls eine konforme Kreisabbildung des Gebiets Ω noch über den Rand hinaus holomorph fortsetzbar ist, so gilt dies auch für die Kernfunktion (als Funktion des zweiten Arguments). Die über den Rand hinaus holomorph fortsetzbaren Funktionen sind dann dicht in $L_B^2(\Omega)$.

Beweis: Mit F ist auch die Ableitung F' holomorph in $\bar{\Omega}$. Für festes $z \in \Omega$ hat $w \mapsto 1 - \overline{F(z)}F(w)$ in $\bar{\Omega}$ keine Nullstelle. Nach Formel (7.12) läßt sich die Kernfunktion über den Rand hinaus holomorph fortsetzen. Die Proposition 6 liefert nun die Dichtheit der Linearkombinationen der $K_z, z \in \Omega$, in $L_B^2(\Omega)$. \square

Das Beispiel des Einheitskreises erlaubt auch Aussagen über nicht einfach zusammenhängende Gebiete:

Satz 23 Sei $\Omega \subset \bar{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, dessen Rand nicht total unzusammenhängend ist. Dann ist $L_B^2(\Omega) \neq 0$ und $\kappa(z) > 0$ für alle $z \in \Omega \setminus \infty$. Die Systeme

$$\{K_z, z \in \Omega\} \text{ mit } K_z(w) = k_B(z, w) \quad (7.16)$$

und

$$\{K_{z_0}^{(j)}, j \in \mathbb{N}_0\} \text{ mit } K_{z_0}^{(j)}(w) = \frac{\partial^j}{\partial z^j} k_B(z, w)|_{z=z_0}, z_0 \in \Omega \text{ fest,} \quad (7.17)$$

sind linear unabhängig.

Beweis: Sei Z eine Zusammenhangskomponente von $\partial\Omega$ mit mindestens zwei Elementen. Dann ist $U := \bar{\mathbb{C}} \setminus Z$ einfach zusammenhängend (in $\bar{\mathbb{C}}$) und läßt zwei Punkte aus, somit gibt es nach dem Riemannschen Abbildungssatz eine konforme Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{D}$, welche $\Omega \subset U$ auf ein Teilgebiet Ω_1 des Einheitskreises abbildet. Für jedes $f \in L_B^2(\mathbb{D})$ gilt $\|f\|_{\mathbb{D}} \geq \|f\|_{\Omega_1}$ und somit: $\kappa_{\mathbb{D}}(z) = \sup\{|f(z)|^2, \|f\|_{\mathbb{D}} = 1\} \leq \sup\{|f(z)|^2, \|f\|_{\Omega_1} = 1\} = \kappa_{\Omega_1}(z)$. Es folgt: $L_B^2(\Omega) \cong L_B^2(\Omega_1) \supset L_B^2(\mathbb{D}) \neq 0$. Die Inklusion ist stetig. Für die Schrankenfunktionen gilt $\kappa_{\Omega}(z) = |F'(z)|^2 \kappa_{\Omega_1}(F(z)) \geq |F'(z)|^2 \kappa_{\mathbb{D}}(F(z)) > 0$.

Die lineare Unabhängigkeit der K_z und der $K_{z_0}^{(j)}$ ist unter der betrachteten Normisomorphie invariant (hier geht $|F'(z)| \neq 0$ wesentlich ein), braucht also nur in Ω_1 untersucht zu werden. Da Ω_1 beschränkt ist, enthält $L_B^2(\Omega_1)$ die Polynome. Sei nun $\sum_{j=1}^n \alpha_j K_{z_j} = 0$, z_j paarweise verschieden. Dann gilt $\sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j f(z_j) = \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j \langle f, K_{z_j} \rangle = 0$

für alle f , insbesondere für $f(z) := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (z - z_j)$. Da $f(z_j) = 0$ für $j \neq k$ und $f(z_k) \neq 0$ ist, muß notwendig

$\alpha_k = 0$ sein. $k = 1, \dots, n$ ist beliebig, also sind die K_{z_j} linear unabhängig. Analog folgt aus $\sum_{j=0}^n \alpha_j K_{z_0}^{(j)} = 0$

für $f(z) := (z - z_0)^k$: $f^{(j)}(z_0) = j! \delta_{jk}$, somit $\alpha_k = 0$ für beliebiges $k = 0, \dots, n$. Die $K_{z_0}^{(j)}$ sind ebenfalls linear unabhängig. \square

Sei nun Ω ein Gebiet mit nicht total unzusammenhängendem Rand. Dann ist κ positiv und man bekommt durch das Linienelement $ds^2 = |dz|^2 \kappa(z)$ eine innere Geometrie auf Ω mit der ersten Grundform

$$G(z) = \begin{pmatrix} \kappa(z) & 0 \\ 0 & \kappa(z) \end{pmatrix}. \quad (7.18)$$

Definition 6 ds heißt Bergmansche Metrik auf Ω .

Proposition 15 Die Bergmansche Metrik ist invariant unter konformen Abbildungen und gebietsmonoton abnehmend. Die Monotonie ist streng, wenn sich die Gebiete um mehr als eine Nullmenge unterscheiden.

Beweis: Sei $z \mapsto w, \Omega_z \rightarrow \Omega_w$, eine konforme Transformation. Dann ist mit Satz 22

$$ds_w^2 = |dw|^2 k(w, w) = |dw|^2 \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 k(z, z) = |dz|^2 k(z, z) = ds_z^2.$$

Sei $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Dann gilt für $z \in \Omega_1$: $\kappa_1(z) = \sup\{f(z) : f \in L_B^2(\Omega_1), \|f\|_{\Omega_1} \leq 1\} \geq \sup\{f(z) : f \in L_B^2(\Omega_2), \|f\|_{\Omega_2} \leq 1\} = \kappa_2(z)$. Die Ungleichung ist strikt, wenn sich die Mengen in ihrem Maß unterscheiden. \square

Satz 24 Die Gaußsche Krümmung C ist überall negativ.

Beweis: Mit der (hier besonders einfachen) ersten Grundform bekommt man (das Argument $w \in \Omega$ wird weggelassen):

$$C := \frac{-1}{2\kappa} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial y} \right) \right] = \frac{-1}{2\kappa} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \log \kappa = \frac{-2}{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \kappa = \frac{-2}{\kappa} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\kappa}{\kappa} = \frac{-2}{\kappa^3} \left[\kappa \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \kappa - \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \kappa \right] = \frac{-2}{\kappa^3} \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix}$$

mit den folgenden Abkürzungen ($K_w^{(i)}$ wie in Korollar 14):

$$a_{jk} = \frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} \kappa(z)|_w = \frac{\partial^j}{\partial z^j} \frac{\partial^k}{\partial \bar{z}^k} k(z, z)|_w = \frac{\partial^j}{\partial z^j} \left(K_w^{(k)}(z) \right)_w = \langle K_w^{(k)}, K_w^{(j)} \rangle,$$

$j, k = 0, 1$. Nach Korollar 14 ist die Determinante eine Gramsche Determinante linear unabhängiger Funktionen, also positiv. Mit $\kappa(w) > 0$ folgt schließlich $C(w) < 0$ in ganz Ω . \square

Im Einheitskreis gilt $ds = \frac{|dz|}{\sqrt{\pi(1-|z|^2)}}$ und in der oberen Halbebene $ds = \frac{|dz|}{2\sqrt{\pi \operatorname{Im} z}}$. Die Gaußsche Krümmung ist eine konforme Invariante, für die obere Halbebene (und damit für alle Gebiete der Kreisklasse) bekommt man $C \equiv -4\pi$.

Bemerkung 4 Die oben definierte Geometrie negativer Krümmung heißt hyperbolisch. Auch für die beiden anderen Klassen einfach zusammenhängender Gebiete in $\bar{\mathbb{C}}$, nämlich $\bar{\mathbb{C}}$ selbst und $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta\}$, $\zeta \in \bar{\mathbb{C}}$ beliebig, kann man eine konform invariante Geometrie konstanter (positiver bzw. verschwindender) Krümmung angeben.

Literatur: Diese und viele andere Ergebnisse findet man bei BERGMAN [Bm], MESCHKOWSKI [Me], sowie in diversen Standardwerken zur Funktionentheorie.

Kapitel 8

Weitere Räume holomorpher Funktionen

8.1 Die Szegösche Kernfunktion

Im Beispiel 5 legen wir nun den $L^2(I)$ zugrunde. Dann bekommen wir einen HmrK, den wir mit $L^2_S(\Omega)$ bezeichnen. Seine Norm ist $\|f\|^2 = \int_I |f(t)|^2 dt$, die Einsetzungsfunktionale sind $f(z) = \int_I f(t) \frac{\dot{\Gamma}(t)}{2\pi i(\Gamma(t)-z)} dt$, seine Kernfunktion $k_S(z, w)$ heißt *Szegösche Kernfunktion*. Die zu (7.9) analoge Normisomorphie zwischen den L^2_S zu konform äquivalenten Gebieten lautet jetzt

$$i_F : f_1 \rightarrow f_2, f_2(F(z)) := \frac{f_1(z)}{\sqrt{F'(z)}} \quad (8.1)$$

(man beachte: Γ ist Bogenlängenparametrisierung). Für den Einheitskreis ($\dot{\Gamma} = i\Gamma$ und $|\Gamma| \equiv 1$) bekommt man die reproduzierende Funktion $\frac{\dot{\Gamma}(t)}{2\pi i(\Gamma(t)-z)} = \frac{i|\Gamma(t)|}{2\pi i(1-\bar{z}\Gamma(t))} = \frac{1}{2\pi(1-\bar{z}\Gamma(t))}$; dies sind die Randwerte der holomorphen Funktion

$$k_S(z, w) = \frac{1}{2\pi(1-\bar{z}w)} \quad (8.2)$$

Die Beziehung

$$k_S(z, w) = \sqrt{\frac{k_B(z, w)}{4\pi}} \quad (8.3)$$

verifiziert man leicht (mit konformen Kreisabbildungen) für allgemeine einfach zusammenhängende Gebiete. Ebenso ergibt sich wieder eine Formel für die bei ζ normierte Kreisabbildung:

$$F_\zeta(z) = \frac{2\pi}{k_S(\zeta, \zeta)} \int_\zeta^z k_S(\zeta, w)^2 dw. \quad (8.4)$$

8.2 Hardy-Lebesgue-Räume

Analog zu Beispiel 4 stellen wir den Hilbertraum ℓ^2 der quadratsummierbaren Folgen komplexer Zahlen mit den stetigen Einsetzungsfunktionalen

$$\ell^2 \ni (a_j)_{j=1}^\infty =: f \mapsto f(z) := \sum_{j=1}^\infty a_j z^{j-1}$$

über \mathbb{D} aus. Sie definieren holomorphe Funktionen im Einheitskreis. Das reproduzierende Element bei $z \in \mathbb{D}$ ist $K_z = (\bar{z}^{j-1})_{j=1}^\infty \in \ell^2$, die Kernfunktion also $k(z, w) = \sum_{j=1}^\infty (\bar{z}w)^{j-1} = \frac{1}{1-\bar{z}w}$. Weiter gilt

$\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\overline{g(re^{i\varphi})}d\varphi = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_j\bar{b}_k r^{j+k} \int_0^{2\pi} e^{i(j-k)\varphi}d\varphi = 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} a_j\bar{b}_j r^{2j}$ für die in \mathbb{ID} holomorphen Funktionen $f \sim \{a_j\}$ und $g \sim \{b_j\}$.

Definition 7 Der Hardy-Lebesgue-Raum $L^2_H(\mathbb{ID})$ ist der Raum aller im Einheitskreis holomorphen Funktionen mit Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{j-1}$ um 0, deren Norm

$$\|f\|^2 := \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \right) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$$

endlich ist.

Durch konforme Transformation bekommt man analoge Räume für andere Gebiete der Kreisklasse. Man beachte, daß die Kernfunktion (bis auf einen konstanten Faktor) mit der Szegö'schen Kernfunktion übereinstimmt, also auch die Räume identisch sind. Im einen Fall geht man von den Randwerten aus und konstruiert mit dem Cauchy-Operator holomorphe Funktionen, im anderen Fall hat man Potenzreihen, d.h. Keime holomorpher Funktionen und nähert sich dem Rand auf inneren Niveaulinien (Urbildern der Kreise $\{re^{i\varphi}\}$ unter einer konformen Kreisabbildung).

8.3 Vektorwertige holomorphe Abbildungen

Sei W ein komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $[\cdot, \cdot]$, Ω ein Gebiet in \mathbb{C} . Eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow W$ heißt (stark) holomorph, wenn sie in jedem Punkt $z \in \Omega$ komplex differenzierbar ist, d.h. wenn

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} =: f'(z) \in W$$

existiert. Analog kann man die schwache Holomorphie einführen, indem man den schwachen Limes zugrunde legt. Nach dem Satz von DUNFORD sind aber ohnehin beide Begriffe äquivalent. Dies erlaubt eine einfache Übertragung der Ergebnisse der skalaren Funktionentheorie, indem man „schwach“ rechnet.

Analog zum eindimensionalen Fall kann man auf dem linearen Raum $\text{Hol}(\Omega, W)$ der holomorphen Abbildungen von Ω nach W ein Skalarprodukt einführen:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} [f(z), g(z)] dz \tag{8.5}$$

$L^2_B(\Omega, W)$ sei der Raum derjenigen $f \in \text{Hol}(\Omega, W)$, für die

$$\|f\|^2 := \langle f, f \rangle \tag{8.6}$$

endlich ist. Da auch in diesem Fall die üblichen Sätze der Funktionentheorie über die Potenzreihenentwicklung und Kurvenintegrale gelten, bekommt man

Satz 25 $L^2_B(\Omega, W)$ ist ein W -Hilbertraum mit reproduzierendem Kern.

8.4 Holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlicher

In \mathbb{C}^n ist die Maximumnorm $|z|_{\infty} = \max_k |z_k|$ äquivalent zur euklidischen Norm $|z|_2 = (\sum_{k=1}^n |z_k|^2)^{1/2}$ des \mathbb{R}^{2n} . Die ε -Umgebungen sind dann Multizylinder $\{z : |z_k| < \varepsilon\}$. Eine im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ holomorphe Funktion läßt sich an jedem inneren Punkt $z_0 \in \Omega$ in eine Potenzreihe $\sum_k a_k (z - z_0)^k$ (Multiindex $k = (k_1, \dots, k_n)$) entwickeln, die in jedem Multizylinder um z_0 in Ω konvergiert. Sei $L^2_B(\Omega)$ der Raum der in Ω holomorphen Funktionen f mit endlichem Quadratintegral $\|f\|^2 := \int_{\Omega} |f(z)|^2 dz$. Der Nachweis der HmrK-Eigenschaft erfolgt ähnlich wie im eindimensionalen Fall (Satz 20). D_{ε} ist nun ein geeigneter Multizylinder, man muß ein insgesamt $2n$ -faches Integral (wieder in Polarkoordinaten) auswerten. Ist F eine biholomorphe Abbildung zwischen den Gebieten $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$,

so bekommt man eine zu (7.9) analoge Normisomorphie der zugehörigen L_B^2 , wobei nun die Funktionaldeterminante der biholomorphen (pseudokonformen) Abbildung F auftritt. Die Kernfunktion des Einheits-Dizylinders in \mathbb{C}^2 ist $k_B(z, w) = \frac{1}{\pi^2(1-\bar{z}_1w_1)^2(1-\bar{z}_2w_2)^2}$, die der Einheitskugel in \mathbb{C}^n ist $k_B(z, w) = \frac{1}{V_n(1-\bar{z}w)^{n+1}}$, V_n : Volumen der Einheitskugel.

Literatur: Neben [Bm] und [Me] liefert H. SHAPIRO [Sh, 6.2.9, etc.] Beispiele für weitere HmrK. Es sei hier auch auf die Arbeiten von FEFFERMAN [Fe] und von FARAUT & KORANYI [Fa] verwiesen. FICHERA [Fi] stellt ebenfalls einige HmrK recht prägnant dar. In seiner Rezension von [Bm] setzt er sich kritisch mit der Anwendung der Theorie der Kernfunktion auf einen hier nicht behandelten Typ von reellen HmrK, gewissen Räumen von Lösungen elliptischer partieller Differentialgleichungen auseinander.

Kapitel 9

Approximation in L_B^2

In diesem Paragraphen soll die Approximation von Funktionen in $L_B^2(\Omega)$ durch „einfachere“ Funktionen behandelt werden. Einige Ergebnisse werden später noch bei der Approximation der konformen Kreisabbildung benutzt.

Bereits in Proposition 6 wurde für allgemeine Hilberträume \mathcal{H} mit reproduzierendem Kern gezeigt, daß $\{K_z, z \in \Omega\}$ vollständig in \mathcal{H} ist. Im Falle holomorpher Funktionen kann man dies wesentlich verschärfen:

Satz 26 *Sei $\Omega \subset \bar{C}$ ein Gebiet und \mathcal{H} ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern, dessen Elemente in Ω holomorphe Funktionen sind. Besitzt weiterhin die Folge $\{z_j, j \in \mathbb{N}\} \subset \Omega$ mindestens einen Häufungspunkt in Ω , so ist das System*

$$A = \{K_j, j \in \mathbb{N}\} \text{ mit } K_j(z) := K_{z_j}(z) = k(z_j, z) \quad (9.1)$$

vollständig in \mathcal{H} . Für jeden festen Punkt z_0 in Ω ist das System

$$B = \{K^{(j)}, j \in \mathbb{N}_0\} \text{ mit } K^{(j)}(z) := K_{z_0}^{(j)}(z) = \frac{\partial^j}{\partial \bar{w}^j} k(w, z)|_{w=z_0} \quad (9.2)$$

vollständig in \mathcal{H} , sofern es überhaupt in \mathcal{H} liegt, d.h. die Einsetzungsfunktionale der Ableitungen im Punkt z_0 stetig sind.

Beweis: Sei $f \in \mathcal{H}$ beliebig, $f \in A^\perp$ (bzw. $f \in B^\perp$), d.h. $\langle f, K_j \rangle = f(z_j) = 0$ (bzw. $\langle f, K^{(j)} \rangle = f^{(j)}(z_0) = 0$) für alle j . In beiden Fällen folgt $f \equiv 0$ in Ω , also $f = 0$. Es gilt $\text{span} A = \text{span} B = 0^\perp = \mathcal{H}$. \square

Wir setzen nun voraus, daß die beiden Systeme A und B linear unabhängig sind (vgl. Satz 23; sonst betrachte man linear unabhängige Teilmengen). Dann kann man beide Systeme zu vollständigen Orthonormalsystemen $\{\sigma_j\}$ bzw. $\{\tau_j\}$ von \mathcal{H} orthonormieren. Es seien

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^n a_{nj} K_j \quad (9.3) \quad \text{und} \quad \tau_n = \sum_{j=0}^n b_{nj} K^{(j)}. \quad (9.4)$$

Dann gelten

$$\langle f, \sigma_n \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{nj} f(z_j) \quad (9.5) \quad \text{und} \quad \langle f, \tau_n \rangle = \sum_{j=0}^n \bar{b}_{nj} f^{(j)}(z_0). \quad (9.6)$$

Die Formel (9.6) ermöglicht eine einfache Umrechnung zwischen den Fourierkoeffizienten bezüglich $\{\tau_n\}$ und den Koeffizienten der Potenzreihe um den Punkt z_0 . (9.5) erlaubt die Berechnung der Fourierreihe einer Funktion aus den Interpolationsdaten bei den Punkten $z_j, j \in \mathbb{N}$. Insbesondere sind $\{\sigma_j, j > n\}$ und $\{\tau_j, j > n\}$ vollständige Orthonormalsysteme für die Teilräume $\{f \in \mathcal{H} : f(z_j) = 0 \text{ für } j = 1, \dots, n\}$ bzw. $\{f \in \mathcal{H} : f^{(j)}(z_0) = 0 \text{ für } j = 0, \dots, n\}$.

Wir kehren wieder zum Raum $L_B^2(\Omega)$ zurück. In Anlehnung an GAIER [Ga2] sollen wichtige Approximationseigenschaften des $L_B^2(\Omega)$ für recht allgemeine einfach zusammenhängende Gebiete der

Kreisklasse gezeigt werden. Besondere Bedeutung erlangt dies im Hinblick auf die numerischen Anwendungen im nächsten Abschnitt dieser Arbeit.

Zunächst benötigen wir den Konvergenzsatz von Carathéodory, der eine Verbindung herstellt zwischen dem Verhalten einer Gebietsfolge und der Folge ihrer konformen Kreisabbildungen (näheres zu letzteren in Kapitel 10). Wir zitieren ihn als

Lemma 3 Voraussetzung und Definition: Sei $\{\Omega_n\}$ eine Folge einfach zusammenhängender Gebiete der Kreisklasse mit einer gemeinsamen offenen Teilmenge $Q \ni \zeta$. Q sei die Menge aller Gebiete, die ζ enthalten, und deren sämtliche kompakte Teilmengen in fast allen Ω_n liegen. Das selbst zu Q gehörende Gebiet $\Omega := \bigcup Q$ heißt der Kern der Gebietsfolge $\{\Omega_n\}$. Die Gebietsfolge heißt konvergent gegen Ω , wenn Ω auch Kern jeder Teilfolge $\{\Omega_{n_k}\}$ ist. Die Abbildungen $F_n : \mathbb{D} \rightarrow \Omega_n$ seien konform und durch $F_n(0) = \zeta$, $F_n'(0) > 0$ normiert.

Behauptung: Die Folge der F_n konvergiert genau dann gegen eine holomorphe Funktion F , wenn die Folge der Bildgebiete $\{\Omega_n\}$ gegen Ω konvergiert. F bildet \mathbb{D} konform auf Ω ab. Weiterhin konvergieren die Folgen $\{F_n\}$, $\{F_n^{-1}\}$ und $\{F_n'\}$ auf Kompakta in \mathbb{D} bzw. in Ω gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktionen.

Der Beweis findet sich z.B. bei GOLUSIN [Go, S.46].

Korollar 19 Seien Ω_n, Ω Gebiete der Kreisklasse und es konvergiere die Folge $\{\Omega_n\}$ gegen Ω . Dann konvergieren die Bergmanschen Kernfunktionen k_n von Ω_n punktweise (als Funktionen zweier Variabler) gegen die Kernfunktion k von Ω .

Beweis: Seien F_n, F wie oben. Dann sind $h_n := F \circ F_n^{-1} : \Omega_n \rightarrow \Omega$ konform. Es gilt $k_n(z, w) = \overline{h_n'(z)} h_n'(w) k(h_n(z), h_n(w))$ (bei festem $z, w \in \Omega$ für fast alle n definiert). Da $\{h_n\}$ auf Kompakta in Ω gleichmäßig gegen die Identität konvergiert und ebenso $\{h_n'\}$ gegen 1 konvergiert, folgt die punktweise Konvergenz (ggf. nach Entfernung einer endlichen Zahl von Folgengliedern, für die $z, w \notin \Omega_n$ ist). \square

Die folgenden Sätze geben Kriterien dafür an, wann die über den Rand holomorph fortsetzbaren Funktionen dicht in $L_B^2(\Omega)$ sind.

Satz 27 Sei $\{\Omega_n\}$ eine gegen Ω konvergierende Folge von Gebieten der Kreisklasse und sei $\overline{\Omega} \subset \Omega_n$. Dann sind die über den Rand von Ω holomorph fortsetzbaren Funktionen dicht in $L_B^2(\Omega)$.

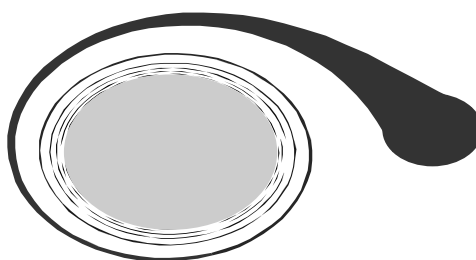
Beweis: Seien die Funktionen h_n wie oben erklärt. Dann gibt es zu jedem $w \in \Omega$ ein $n_0(w)$ mit $h_n^{-1}(w) \in \Omega$, d.h. $w \in h_n(\Omega)$ für alle $n > n_0(w)$. Die Mengen $h_n(\Omega)$ schöpfen Ω aus. Sei $f \in L_B^2(\Omega)$ beliebig und $f_n(w) := h_n'(w) f(h_n(w))$. Dann ist $f_n \in L_B^2(\Omega_n)$, $\|f_n\|_{\Omega_n} = \|f\|_{\Omega}$. Unter der Voraussetzung $\Omega \subset \Omega_n$ gilt $L_B^2(\Omega_n) \subset L_B^2(\Omega)$, d.h. $f_n \in L_B^2(\Omega)$ und es gilt $\|f_n\|_{\Omega}^2 = \|f\|_{h_n(\Omega)}^2 = \int_{h_n(\Omega)} |f(w)|^2 dw \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f(w)|^2 dw = \|f\|_{\Omega}^2$. Zusammen mit der punktweisen Konvergenz der Folge $\{f_n\}$ gegen f liefert Korollar 1 die starke Konvergenz, d.h. $f_n \rightarrow f$ in $L_B^2(\Omega)$. Die Funktionen f_n sind in $\Omega_n \supset \overline{\Omega}$ holomorph. Hieraus folgt die Behauptung. \square

Satz 28 Sei $\Omega \subset \bar{C}$ einfach zusammenhängend und $\partial\Omega$ auch Rand eines zu Ω disjunkten Gebiets U . Dann sind die noch auf $\overline{\Omega}$ holomorphen Funktionen dicht in $L_B^2(\Omega)$.

Beweis: U ist in \bar{C} einfach zusammenhängend, also gibt es eine Abbildung F von U auf den Einheitskreis. Seien Γ_n die Urbilder der Kreislinien $\{z : |z| = \frac{n}{n+1}\}$, $n \in \mathbb{N}$, unter F . Die Γ_n sind analytische Jordankurven, welche Ω umschließen. Ω_n seien diejenigen von Γ_n berandeten Gebiete, die Ω enthalten. Die Gebietsfolge $\{\Omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ besteht aus einfach zusammenhängenden Gebieten der Kreisklasse, die alle das Gebiet Ω enthalten. Insbesondere liegen die kompakten Teilmengen von Ω in Ω_n . Andererseits ist Ω auch schon das größte Gebiet, dessen sämtliche kompakten Teilmengen in fast allen Ω_n enthalten sind: Sei nämlich G ein Ω echt umfassendes Gebiet. Dann gibt es ein $z_1 \in G \cap \partial\Omega = G \cap \partial U$. Da G offen ist, enthält es eine Umgebung von z_1 , in der wiederum ein $z_2 \in G \cap U$ liegt. Die kompakte Menge $\{z_2\} \subset G$ liegt nur in endlich vielen Ω_n , nämlich in den Ω_n , für die $|F(z_2)| > \frac{n}{n+1}$, d.h. $n < \frac{|F(z_2)|}{1 - |F(z_2)|}$ gilt. Anstelle der Gebietsfolge $\{\Omega_n\}$ kann man auch von irgend einer Teilfolge ausgehen. Hieraus folgt die Konvergenz der Folge $\{\Omega_n\}$ gegen das Gebiet Ω im Sinne des Konvergenzsatzes von Carathéodory. Da außerdem $\overline{\Omega} \subset \Omega_n$ für alle n gilt, folgt aus dem vorhergehenden Satz die Behauptung. \square

Wie man sofort sieht, trifft der Satz auf alle Jordangebiete zu. In diesem Fall ist der Rand eine einfach geschlossene Kurve γ , die die ergänzte Ebene \bar{C} in zwei einfach zusammenhängende Gebiete U_1 und U_2 teilt. Die Urbilder der Kreislinien $\{z: |z| = r\}$, $r < 1$, unter geeignet normierten Kreisabbildungen $F_{1,2}$ von $U_{1,2}$ werden mit $\gamma_r^{1,2}$ bezeichnet („Niveaulinien“, vgl. Kapitel 10). Sie sind analytische Jordankurven und für $r \rightarrow 1$ konvergieren die von ihnen berandeten Gebiete gegen U_1 bzw. U_2 im Sinne des Konvergenzsatzes von Carathéodory. Die Niveaulinien der $\gamma_r^{1,2}$ wiederum konvergieren im üblichen Sinn (bei geeigneter Parametrisierung) gegen die Niveaulinien von γ (da die Kreisabbildungen konvergieren).

Auch Schlangengebiete Ω (vgl. Abb. 9.1), die sich an eine Grenzmenge G heranwinden, erfüllen die Bedingung des Satzes. Ihr Rand $\partial\Omega$ enthält Randpunkte von G , diese sind aber keine (auf endlichen stetigen Wegen aus dem Inneren des Gebiets) erreichbaren Randpunkte.



Das äußere Komplementgebiet (d.h. die ergänzte Ebene ohne die abgeschlossene Schlange und den Grenzkreis) hat den gleichen Rand wie Ω und ist einfach zusammenhängend. Der Rand ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Abbildung 9.1: Schlange um einen Kreis.

Die im Satz genannte Bedingung ist hinreichend, aber nicht notwendig. Beispielsweise können die noch auf dem Rand holomorphen Funktionen in $L_B^2(\Omega)$ dicht sein — oder auch nicht, wenn Ω ein Mondgebiet ist, d.h. ein Gebiet, dessen Randkurve einen Doppelpunkt besitzt (Abb 9.2, unten links). In diesem Fall ist jede komplementäre offene Menge mit demselben Rand nicht zusammenhängend. Eine genauere Charakterisierung dieser Gebiete kann man bei [Ga2, S.28–29] finden. Manchmal erlaubt der Vergleich zweier Gebiete eine *negative* Aussage:

Proposition 16 Seien Ω_1 und Ω_2 zwei verschiedene Gebiete mit gleichem Abschluß $\bar{\Omega}_1$. Dann ist $L_B^2(\bar{\Omega}_1)$ höchstens in einem der Räume $L_B^2(\Omega_i)$ dicht.

Beweis: Die beiden Gebiete unterscheiden sich nur um eine Nullmenge. Der Abschluß von $L_B^2(\bar{\Omega}_1)$ ergibt jeweils den gleichen Teilraum. Da die $L_B^2(\Omega_i)$ nach Korollar 17 verschieden sind, folgt die Behauptung. \square

Beispiel 7 Ein einfach zusammenhängendes Gebiet, welches Randpunkte besitzt, die im Inneren seines Abschlusses liegen, heißt Schlitzgebiet (Abb. 9.2, oben links). Falls der äußere Rand gleichzeitig Rand eines komplementären Gebiets ist, muß es in L_B^2 eine Funktion geben, die nicht beliebig durch auch noch auf dem Rand holomorphe Funktionen approximiert werden kann.

Definition 8 Ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand auch Rand eines unbeschränkten Komplementärgebietes ist, heißt Carathéodory-Gebiet.

Korollar 20 Sei Ω Carathéodory-Gebiet. Dann sind die Polynome dicht in $L_B^2(\Omega)$. Die Monome z^k , $k \in \mathbb{N}_0$, sind vollständig in $L_B^2(\Omega)$. Ist Ω wie im Satz 28, $w \in U \setminus \infty$, dann sind die Funktionen $\frac{1}{(z-w)^k}$, $k = 2, 3, \dots$, vollständig in $L_B^2(\Omega)$.

Beweis: Sei Ω zunächst Carathéodory-Gebiet. Dann ist $\bar{\Omega}$ kompakt und die hierauf holomorphen Funktionen lassen sich nach dem Rungeschen Approximationssatz gleichmäßig durch Polynome approximieren. Da Ω außerdem beschränkt, d.h. von endlichem Maß ist, kann man die auf $\bar{\Omega}$ holomorphen Funktionen — und damit nach dem Satz 28 alle $f \in L_B^2(\Omega)$ — auch in der Norm beliebig genau durch Polynome approximieren. Im allgemeineren Fall bilden wir Ω mit der in ganz \bar{C} konformen Transformation $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ in das Innere eines

geeigneten Kreises um w ab. Da w nach ∞ abgebildet wird, ist das Bild von U unbeschränkt und wir haben nun ein Carathéodory-Gebiet, auf das die schon bewiesene Aussage anwendbar ist. Zusammen mit Satz 22 folgt:

$$\left(\frac{1}{z-w}\right)^k \frac{-1}{(z-w)^2} = \frac{-1}{(z-w)^{(k+2)}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (9.7)$$

sind vollständig in $L_B^2(\Omega)$. □

Die Außenschlange aus Abb. 9.1 ist ein Carathéodory-Gebiet, nicht dagegen eine Schlange, die sich von innen an die Kreislinie heranwindet. Gehört w nicht zur Innenschlange Ω , liegt aber innerhalb der Kreislinie, so bilden die Funktionen $(z-w)^{-k}$, $k = 2, 3, \dots$, ein vollständiges System in $L_B^2(\Omega)$. Für einige Gebiete, die nicht in die obige Klasse fallen, lassen sich vollständige Systeme gewinnen, wenn man ein solches Gebiet durch eine explizit angebbare konforme Transformation auf ein Carathéodory-Gebiet abbilden kann. Im Beispiel eines Carathéodory-Gebiets mit einem einfachen Schlitz gelingt dies mit einem geeigneten Zweig der Quadratwurzel. Dann sind die Funktionen $\sqrt{z^k} \frac{-1}{2\sqrt{z}}$, d.h. $\sqrt{z^{k-1}}$, $k \in \mathbb{N}_0$, vollständig, falls das innere Ende des Schlitzes bei 0 liegt. Auf dieselbe Weise lassen sich bei Mondgebieten die „Hörner auseinanderbiegen“ (Abb. 9.2).

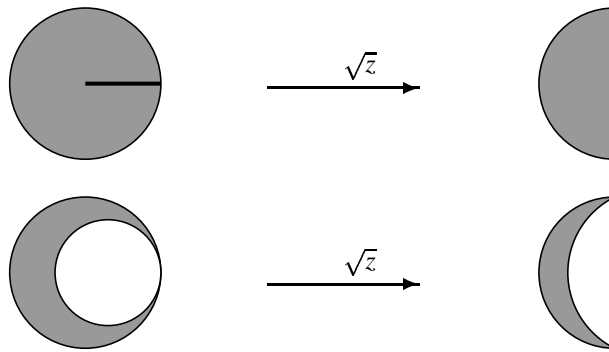


Abbildung 9.2: Konforme Abbildung von Schlitz- und Mondgebieten auf Carathéodory-Gebiete

Die Monome $\eta_j(z) := z^{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, sind linear unabhängig, durch Orthonormieren bekommt man in Carathéodory-Gebieten ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\rho_j, j \in \mathbb{N}\}$ für den L_B^2 . In diesem Fall gibt es Abschätzungen für den Reihenrest der Fourierreihe, vgl. [Ga2, S.33]. Hierfür benötigen wir zunächst ein

Lemma 4 (Bernstein) Sei p ein Polynom vom Grad n mit $|p(z)| \leq 1$ auf der Jordankurve γ . F sei eine konforme Abbildung der unbeschränkten Komponente von γ auf den Einheitskreis mit $F(\infty) = 0$, $\gamma_r := \{z : |F(z)| = 1/r\}$ sei äußere Niveaulinie von γ . Dann gilt

$$|p(z)| \leq r^n \text{ für } z \in \gamma_r \cup \text{Int } \gamma_r. \quad (9.8)$$

Beweis: p hat in ∞ einen n -fachen Pol, F eine einfache Nullstelle. Außerdem ist F stetig auf den Jordanrand γ fortsetzbar (vgl. Satz 33). Hieraus folgt, daß die Funktion $p(z)(F(z))^n$ außerhalb von γ holomorph und auf γ stetig fortsetzbar ist. Ihr Betrag nimmt sein Maximum auf dem Rand γ an, d.h. es gilt $|p(z)(F(z))^n| \leq 1$ außerhalb von γ . Auf γ_r folgt $|p(z)| \leq |F(z)|^{-n} = r^n$. Mit dem Prinzip vom maximalen Betrag folgt die Behauptung auch innerhalb von γ_r . □

Das (wesentlichere) Hilfsmittel wollen wir nur zitieren ([Ga2, S.67]):

Lemma 5 Sei Ω ein beschränktes Jordangebiet, f holomorph innerhalb der Niveaulinie Γ_r des Randes. Dann gibt es eine Konstante M und Polynome p_n vom Grad n mit

$$\max\{|f(z) - p_n(z)|, z \in \overline{\Omega}\} \leq M \cdot r^{-n}. \quad (9.9)$$

Satz 29 Sei Ω ein beschränktes Jordangebiet mit Rand Γ , $f \in L_B^2(\overline{\Omega})$, d.h. auch noch auf dem Rand holomorph, und $R > 1$ die größte Zahl derart, daß f innerhalb der Niveaulinie Γ_R holomorph ist.

Für die Approximation $f_n = \sum_{j=1}^{n+1} a_j \rho_j$ von $f = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \rho_j$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\max\{|f(z) - f_n(z)| : z \in \overline{\Omega}\} \in O(r^{-n}) \quad (9.10)$$

für jedes $r < R$, aber kein $r > R$. Für $1 \leq \sigma < r < R$ gilt

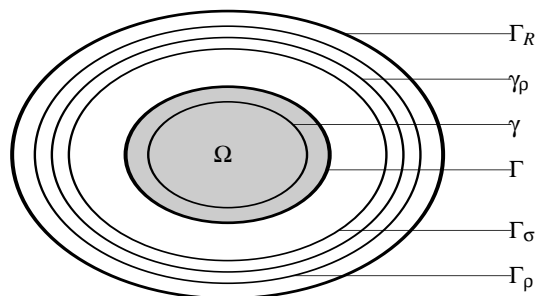
$$\max\{|f(z) - f_n(z)| : z \in \Gamma_\sigma \cup \text{Int} \Gamma_\sigma\} \in O((\sigma/r)^n). \quad (9.11)$$

Beweis: i) Es gebe Polynome p_n mit Grad n und $|f(z) - p_n(z)| \leq M_1 \cdot r^{-n}$ in $\overline{\Omega}$ für ein $r > 1$ und jedes feste f . Dann ist $|p_{n+1}(z) - p_n(z)| \leq |f(z) - p_{n+1}(z)| + |f(z) - p_n(z)| \leq 2M_1 \cdot r^{-n}$. Mit dem Bernsteinschen Lemma folgt: $|p_{n+1}(z) - p_n(z)| \leq 2M_1 \cdot r^{-n} \rho^{n+1} = 2M_1 \cdot \rho(\rho/r)^n$ für alle $z \in \text{Int} \Gamma_\rho$. Innerhalb von Γ_ρ , $\rho < r$ beliebig, konvergiert $p_n = p_0 + \sum_{k=1}^n (p_k - p_{k-1})$ gleichmäßig gegen eine dort holomorphe Funktion, welche in Ω mit f identisch ist. f ist innerhalb von Γ_ρ holomorph fortsetzbar, d.h. notwendig $r \leq R$.

ii) Für die Umkehrung zeigen wir die allgemeinere Abschätzung (9.11). Sei also $1 \leq \sigma < r < R$ und f innerhalb von Γ_R holomorph. Dann gibt es ein $\tau \in (r, R)$ und mit $\rho := \frac{\sigma}{r} \tau$ gilt $1 \leq \sigma < \rho < \tau < R$. Nach dem zweiten Lemma läßt sich f im Gebiet Ω gleichmäßig durch Polynome p_n approximieren, mit Fehler $\leq M_2 \cdot \tau^{-n}$. Für die Teilsummen f_n der Fourierreihe von f (welche f unter allen Polynomen vom gleichen Grad in der Norm am besten approximiert) gilt: $\|f - f_n\| \leq \|f - p_n\| \leq M_2 \cdot \tau^{-n} \cdot |\Omega| = M_3 \cdot \tau^{-n}$. In Ω gibt es eine Jordankurve γ , deren äußere Niveaulinie γ_ρ außerhalb von Γ_σ verläuft (Skizze). Da f_n auf dem Kompaktum $\gamma \subset \Omega$ gleichmäßig konvergiert, gilt dort: $|f_{n+1}(z) - f_n(z)| \leq M_4 \tau^{-n}$. Das Bernsteinsche Lemma liefert jetzt $|f_{n+1}(z) - f_n(z)| \leq M_4 \tau^{-n} \rho^{n+1}$ für alle $z \in \gamma_\rho$. Daher konvergiert $f_n = f_0 + \sum_{k=1}^n (f_k - f_{k-1})$ auf (und innerhalb) von γ_ρ gleichmäßig gegen eine holomorphe Fortsetzung von f und für diese gilt insbesondere auf und innerhalb von Γ_σ : $|f(z) - f_n(z)| = |\sum_{k=n}^{\infty} (f_{k+1}(z) - f_k(z))| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |f_{k+1}(z) - f_k(z)| \leq M_4 \rho \sum_{k=n}^{\infty} (\rho/\tau)^k = M_5 (\rho/\tau)^n = M_5 (\sigma/r)^n$.

Skizze:

Sei $\gamma = \Gamma_s^i$ eine innere Niveaulinie des Randes. Für $s \rightarrow 1$ geht $\gamma \rightarrow \Gamma$, d.h. $\gamma_\rho \rightarrow \Gamma_\rho$, γ_ρ liegt also für ein passendes s außerhalb von Γ_σ .



□

Von diesem Satz gibt es eine „rationale“ Verallgemeinerung. Die Approximation findet dabei nicht mehr in den Räumen der Polynome vom Grad $\leq n$ statt, sondern in R_{nm} , den Räumen der rationalen Funktionen mit Zählergrad $\leq n$ und Nennergrad $\leq m$, deren Polstellen alle außerhalb von $\overline{\Omega}$ liegen. Falls f in $\text{Int} \Gamma_\rho$ meromorph ist und die höchstens m Polstellen außerhalb von $\overline{\Omega}$ liegen, dann gibt es in Verallgemeinerung zum Lemma 5 rationale Funktionen $r_n \in R_{nm}$ mit

$$\max\{|f(z) - r_n(z)|, z \in \overline{\Omega}\} \leq M_1 \cdot \rho^{-n}. \quad (9.12)$$

Den Beweis findet man bei WALSH, [Wa, Th.2]. Bei festem f genügt es, den Polynomraum durch die Hauptteile von f an den betreffenden Polstellen anzureichern. Sind f_n nun die Normapproximationen in diesen erweiterten Räumen, so ist $\|f - f_n\| \leq M_2 \cdot \rho^{-n}$. Hieraus folgt $|f(z) - f_n(z)| \leq M_3 \cdot \rho^{-n}$ auf einer beliebigen Jordankurve $\gamma \subset \Omega$. Es gilt weiter

Satz 30 ([Wa, Th.5,8,9]) Sei γ eine Jordankurve, f in $\text{Int} \gamma \cup \gamma$ holomorph und innerhalb der Niveaulinie γ_ρ meromorph mit genau m Polen. Weiter gebe es Funktionen $r_n \in R_{nm}$ mit $\limsup_n \max\{|f(z) - r_n(z)|, z \in \gamma\}^{1/n} \leq \frac{1}{\rho}$. Dann hat r_n für genügend großes n genau m Pole, welche gegen diejenigen von f konvergieren. Auf Kompakta $S \subset \text{Int} \gamma_\sigma \cup \gamma_\sigma$, $1 \leq \sigma < \rho$, gilt

$$\limsup_n \max\{|f(z) - r_n(z)|, z \in S\}^{1/n} \leq \frac{\sigma}{\rho}. \quad (9.13)$$

Ist R die größte Zahl derart, daß genau die m Pole und keine anderen Singularitäten von f innerhalb von γ_R liegen, dann ist

$$\limsup_n \max\{|f(z) - r_n(z)|, z \in \text{Int } \gamma \cup \gamma\}^{1/n} = \frac{1}{R}. \quad (9.14)$$

In unserer Situation kann man für ein festes aber beliebiges $\sigma \in (1, \rho)$ die Kurve γ so nahe am Rand Γ wählen, daß alle m Polstellen innerhalb von γ_ρ liegen und $\bar{\Omega}$ innerhalb von γ_σ liegt. Aus (9.13) folgt dann mit $\sigma = 1$:

$$\limsup_n \max\{|f(z) - f_n(z)|, z \in \bar{\Omega}\}^{1/n} \leq \frac{1}{\rho}. \quad (9.15)$$

Man kann jetzt auch $\gamma = \Gamma$ setzen und bekommt die Gleichung (9.14) mit R als maximal möglichem Wert für ρ , was gerade die erstrebte Verallgemeinerung von Satz 29 ist.

Teil III

Die Approximation der konformen Kreisabbildung

Kapitel 10

Exkurs: Eigenschaften konformer Abbildungen

In diesem Paragraphen sollen einige wichtige Begriffe und Ergebnisse über konforme Abbildungen angegeben werden, welche in den folgenden Abschnitten benötigt werden. Fundamental ist der

Satz 31 (RIEMANNSCHE ABILDUNGSSATZ) Sei $\Omega \subset \bar{\mathbb{C}}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit mindestens zwei Randpunkten, $\zeta \in \Omega$. Dann gibt es genau eine konforme Abbildung F von Ω auf die Einheitskreisscheibe mit $F(\zeta) = 0$ und $F'(\zeta) > 0$.

Unter allen wie oben normierten, auf Ω konformen Abbildungen hat F die größte Ableitung bei ζ .

Die Größe $R_\zeta(\Omega) := \frac{1}{F'(\zeta)} \stackrel{(7.13)}{=} \sqrt{\pi k_B(\zeta, \zeta)}^{-1}$ heißt *konformer Radius* von Ω in Bezug auf ζ . Für $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ gilt $R_\zeta(\tilde{\Omega}) \leq R_\zeta(\Omega)$. Für Gebiete, die sich um mehr als eine Nullmenge unterscheiden, hat man nach Proposition 15 strikte Ungleichheit. Ist Ω unbeschränkt und $\zeta = \infty$, so schaltet man wie üblich die Transformation $z \mapsto \frac{1}{z}$ vor und nach. Ist dann $F_0 : \Omega^{-1} \rightarrow \mathbb{D}$ die in 0 normierte konforme

Kreisabbildung des transformierten Gebiets, so bildet $F_\infty : z \mapsto \frac{1}{F_0(\frac{1}{z})}$ Ω auf das Gebiet $\mathbb{D}^{-1} = \{w :$

$|w| > 1\}$ konform ab. Es gilt $F_\infty(\infty) = \infty$ und $F_\infty'(\infty) = \frac{-1}{F_0(z)^2} F_0'(z)(-z^2) \Big|_{z=0} \stackrel{\text{Hospital}}{=} \frac{1}{F_0'(0)} > 0$.

$R_\infty(\Omega) := F_\infty'(\infty)^{-1} = F_0'(0)$ nimmt mit Ω monoton ab. Ist A eine beschränkte abgeschlossene Menge, deren Komplement das Gebiet $\Omega = \text{Ext}A$ als unbeschränkte Komponente besitzt, so ist $\text{cap}(A) = R_\infty(\Omega)$ die *Kapazität* von A . Sie wächst monoton mit A . Die analytische Kurve $A_r := \{z : |F_\infty(z)| = r\}$, $r > 1$, heißt *äußere Niveaulinie* von A . Dabei ist $F_\infty : \text{Ext}A \rightarrow \mathbb{D}^{-1}$ die in ∞ normierte konforme Abbildung.

Satz 32 Sei A ein zusammenhängendes Kompaktum mit Durchmesser D und Kapazität c . r und R seien Radien eines ganz innerhalb von $\partial \text{Ext}A$ gelegenen und eines A umfassenden Kreises. Dann gilt

$$4c \geq D \quad \text{und} \quad r \leq c \leq R. \quad (10.1)$$

Liegt der Rand des einfach zusammenhängenden Gebiets Ω zwischen konzentrischen Kreisen um ζ mit Radien r und R , so ist $r \leq R_\zeta(\Omega) \leq R$. Der Kreis um ζ mit Radius $R_\zeta(\Omega)$ enthält Randpunkte von Ω .

Für einen Kreis um ζ mit Radius R sind Randkapazität und konformer Radius bezüglich ζ trivialerweise beide gleich R . Bei Strecken wird $4c = D$ erreicht. Die Monotonieaussagen gelten zumindest dann streng, wenn sich die Gebiete um mehr als eine Nullmenge unterscheiden. Beweise für die angegebenen Sachverhalte und weitere Ergebnisse findet man etwa bei GOLUSIN [Go, S.24, S.41, S.264 u.a.].

Wir wenden uns nun der Ränderzuordnung zu ([Go, S.25-37]):

Satz 33 Sei $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ konform und γ ein (offener) Jordanscher Kurvenbogen des Randes von Ω , der keine Häufungspunkte des restlichen Randes enthält. Dann ist F zu einem Homöomorphismus zwischen $\Omega \cup \gamma$ und $\mathbb{D} \cup \gamma'$ mit dem zugehörigen Kreisbogen γ' fortsetzbar. Ist Ω ein Jordangebiet, so ist F zu einem Homöomorphismus zwischen $\overline{\Omega}$ und $\overline{\mathbb{D}}$ fortsetzbar.

Im Falle allgemeinerer Gebiete läßt sich eine eindeutige Ränderzuordnung immerhin noch für (durch stetige Wege aus dem Inneren von Ω) erreichbare Randpunkte gewinnen.

Zusammen mit den entsprechenden Eindeutigkeitsaussagen für Automorphismen des Einheitskreises ergibt die eindeutige Ränderzuordnung:

Korollar 21 Es gibt genau eine konforme Abbildung F des Jordangebiets Ω auf den Einheitskreis mit

1. $F^{-1}(0) = \zeta$ und $F'(\zeta) > 0$ für ein vorgegebenes $\zeta \in \Omega$.
2. $F^{-1}(0) = \zeta_0$ und $F^{-1}(1) = \zeta_1$ für $\zeta_0 \in \Omega$ und $\zeta_1 \in \partial\Omega$.
3. $F^{-1}(\eta_k) = \zeta_k$ für je drei (in positiver Orientierung numerierte) Punkte $\eta_k \in \partial\mathbb{D}$ und $\zeta_k \in \partial\Omega$.

Sei γ eine analytische Kurve, d.h. es gebe eine Parametrisierung $\gamma(\cdot)$ über einem reellen Intervall I , welche eine (komplexe, o.B.d.A. symmetrische) Umgebung $W \supset I$ auf eine Umgebung U von γ konform abbildet. Im Falle einer geschlossenen Kurve sei $\gamma(\cdot)$ periodisch und im Periodenstreifen über I bijektiv. Auf U ist die Reflexion $\rho(z) := \gamma(\overline{\gamma^{-1}(z)})$ definiert. ρ ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung: Seien γ_1 und γ_2 zwei analytische Parametrisierungen, z ein Punkt im gemeinsam überdeckten Bereich $U_1 \cap U_2$. Dann gilt: $\rho_1(z) = \gamma_1(\overline{\gamma_1^{-1}(z)}) = \gamma_2 \circ \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1(\overline{\gamma_1^{-1}(z)}) \stackrel{(*)}{=} \gamma_2(\overline{\gamma_2^{-1}(\gamma_1 \circ \gamma_1^{-1}(z))}) = \rho_2(z)$. Dabei gilt (*) nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip, denn $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$ ist holomorph und auf I reellwertig, also notwendig mit der Konjugation vertauschbar. ρ ist also in einer Umgebung der Kurve γ wohldefiniert. Man verifiziert leicht, daß die Reflexion als Zusammensetzung zweier konformer Abbildungen mit einer antikonformen Funktion (der Konjugation) antikonform ist, d.h. bijektiv in einer passenden Umgebung von γ , $\frac{\partial}{\partial z}\rho = 0$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\rho \neq 0$.

Beispiel 8 Der Einheitskreis wird parametrisiert durch $\eta(t) = e^{it}$. η ist in ganz \mathbb{C} definiert und überdeckt $\mathbb{C} \setminus 0$. In diesem Fall ist $\rho_\eta(z) = \exp(i \cdot \frac{1}{i} \ln(z)) = \exp(-\overline{\ln(z)}) = 1/\bar{z}$ die bekannte Spiegelung am Einheitskreis. Sie kann (antikonform in $\overline{\mathbb{C}}$) fortgesetzt werden zu $\rho(0) = \infty$, hat also bei 0 einen einfachen Pol.

Satz 34 Sei $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ konform und γ ein (offener) Jordanscher Kurvenbogen von $\partial\Omega$, der keine Häufungspunkte des restlichen Randes enthält. Dann ist F auf $\Omega \cup \gamma$ genau dann konform fortsetzbar, wenn γ analytisch ist. F ist genau dann auf $\overline{\Omega}$ konform fortsetzbar, wenn Ω analytisch berandet ist.

Beweis: Aus der konformen Fortsetzbarkeit folgt sofort, daß das betreffende Randstück konformes Bild eines Kreisbogens ist, also eine analytische Kurve darstellt. Ist umgekehrt γ ein analytisches Randstück von Ω , so ist in einer Umgebung U von γ die Reflexion ρ_γ definiert. In $U \cap \text{Ext}\gamma$ kann man $F := \rho_\eta \circ F \circ \rho_\gamma$ setzen. Diese Fortsetzung ist bijektiv und, wie man leicht verifiziert, auch konform. \square

Die konforme Fortsetzung ist explizit gegeben. Falls die analytische Parametrisierung von $\partial\Omega$ bekannt ist, lassen sich hieraus Aussagen über die Fortsetzbarkeit von F und die Lage möglicher Singularitäten gewinnen.

Beispiel 9 Sei $(-1, 1) \times [-1, 0) \subset \Omega$, $\gamma = (-1, 1) \subset \partial\Omega$ und $\zeta = -i$. Dann ist F (wie üblich normiert) über γ hinweg auf $(-1, 1) \times [0, 1]$ konform fortsetzbar und hat bei i einen einfachen Pol. Ist Ω das Quadrat $(-1, 1) \times (-1, 1)$, $\zeta = 0$, so bekommt man durch wiederholte Reflexion an den Seiten die meromorphe Fortsetzung der konformen Kreisabbildung auf ganz \mathbb{C} mit einfachen Polen bei $2k + 2 + (2j + 2)i$, k, j ganze Zahlen.

Man beachte, daß die holomorphe (d.h. polfreie) Fortsetzbarkeit der konformen Kreisabbildung von der Wahl der Nullstelle ζ abhängt. Nähert sich ζ einem analytischen Randstück, so tritt auch die gespiegelte Polsingularität näher an den Rand heran.

Eine weitere Quelle von Singularitäten der konformen Kreisabbildung sind die Ecken zwischen analytischen Randstücken. Der obige Satz sagt aus, daß an jeder Stelle z_0 des Randes, an der keine analytische Parametrisierung möglich ist, auch die konforme Kreisabbildung des Gebiets nicht mehr konform fortgesetzt werden kann. In gewissen Fällen bleibt aber die *holomorphe* Fortsetzbarkeit erhalten. Treffen etwa an einer Ecke z_0 zwei Strecken mit Innenwinkel π/k , $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, aufeinander, so kann man die beiden Randstücke mit der Potenzfunktion $(z - z_0)^k$ geradebiegen. Dabei bleiben die Strecken gerade und der Winkel wird π . Der Rand des Bildgebiets Ω^* kann dann bei 0 analytisch parametrisiert werden. Hieraus folgt $F(z) = g((z - z_0)^k)$, wobei g eine passende konforme Kreisabbildung von Ω^* ist, welche bei 0 konform fortgesetzt werden kann. Strecken mit Innenwinkeln von $\pi\alpha$, $1/\alpha \notin \mathbb{N}$ lassen sich mit der Abbildung $z \mapsto (z - z_0)^{1/\alpha}$ geradebiegen. Hier geht die Holomorphie der Kreisabbildung aber verloren. Man hat dafür eine Entwicklung in $z^{k/\alpha}$ (und nicht eine Potenzreihe in z), der Koeffizient bei $z^{1/\alpha}$ verschwindet nicht.

Das allgemeine Resultat stammt von LEHMAN [Le]:

Satz 35 Sei Ω stückweise analytisch berandet, $z_0 = 0 \in \partial\Omega$, und seien γ_1 und γ_2 zwei analytische Randstücke, welche sich in 0 mit einem Innenwinkel von $\alpha\pi$ treffen. f sei eine konforme Abbildung der oberen Halbebene auf Ω mit $f(0) = 0$. Dann ist f lokal auf die logarithmische Riemannsche Fläche mit (singulärem) Verzweigungspunkt 0 fortsetzbar. In einem endlichen Sektor (d.h. $|\arg z|$ beschränkt) kann man f für $z \rightarrow 0$ darstellen durch

$$f(z) = \sum A_{kl} z^{k+l\alpha} \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N} \text{ und } A_{01} \neq 0, \quad (10.2)$$

falls α irrational ist und durch

$$f(z) = \sum A_{klm} z^{k+l\alpha} (\log z)^m, \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0, 1 \leq l \leq q, 0 \leq m \leq k/p \quad (10.3)$$

und $A_{010} \neq 0$, falls $\alpha = p/q$ (in gekürzter Form) rational ist. Die Inverse f^{-1} läßt sich darstellen durch:

$$f^{-1}(z) = \sum B_{kl} z^{k+l/\alpha}, \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}, B_{01} \neq 0, \text{ bzw.} \quad (10.4)$$

$$f^{-1}(z) = \sum B_{klm} z^{k+l/\alpha} (\log z)^m, \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0, 1 \leq l \leq p, 0 \leq m \leq k/p \quad (10.5)$$

und $B_{010} \neq 0$. Die entsprechende Aussage gilt für jede konforme Kreisabbildung.

Hieraus bekommt man auch Informationen über das Randverhalten der Kernfunktion. Diese hat an einer Ecke zwischen analytischen Randstücken (keine Spitze) eine Singularität, die (bei festem ersten Argument) im Betrag höchstens wie $r^{1/\alpha-1}$ wächst, wobei r der Abstand von der Ecke und der Exponent $> -1/2$ ist. Die Kernfunktion bleibt beschränkt, wenn der Innenwinkel $\leq \pi$ ist. Die Ableitung der Abbildung des Kreises auf das Gebiet bleibt dagegen beschränkt, wenn der Außenwinkel an der Ecke $\leq \pi$ ist.

Ein weiterer wichtiger Begriff der geometrischen Funktionentheorie ist derjenige der quasikonformen Abbildung.

Definition 9 Ein (reell) differenzierbarer Homöomorphismus f von \bar{C} heißt quasikonforme Abbildung, wenn die Beltrami-Gleichung

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z \text{ mit } |\mu| \leq \text{const} < 1 \quad (10.6)$$

erfüllt ist. Eine geschlossene Jordankurve heißt quasikonform oder ein Quasikreis, wenn sie quasikonformes Bild der Kreislinie ist.

Satz 36 Es sind äquivalent:

1. Γ ist Quasikreis.
2. Sei $\text{arc}(P, Q)$ der Bogen zwischen $P, Q \in \Gamma$ mit dem kleineren Durchmesser. Dann gilt

$$\sup_{P, Q \in \Gamma} \frac{\text{diam arc}(P, Q)}{|P - Q|} < \infty. \quad (10.7)$$

3. Die konforme Kreisabbildung des Inneren von Γ ist auf ganz \bar{C} quasikonform fortsetzbar.
4. Auf ganz \bar{C} ist eine (anti-)quasikonforme Reflexion an Γ definiert.

Zum Beweis und für weitere Eigenschaften: AHLFORS [Ah]. Stückweise glatte Jordankurven sind Quasikreise, wenn sie keine Spitzen (Innenwinkel von 0 oder 2π) enthalten.

Sei Γ eine Jordankurve und seien $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega_1 := \text{Int}\Gamma$ und $g : \mathbb{D}^{-1} = \{w : |w| > 1\} \rightarrow \Omega_2 := \text{Ext}\Gamma$ konforme Abbildungen mit $f(0) = \zeta \in \Omega_1$ und $g(\infty) = \infty$.

Satz 37

1. Falls sich in jedem Punkt $z_0 \in \Gamma$ ein fest vorgegebener Kreissektor mit Radius $r > 0$ und Winkel $\lambda\pi$ an der Spitze z_0 so anlegen läßt, daß er ganz in $\bar{\Omega}_1$ liegt, so folgt hieraus $f \in C_\lambda$. Läßt sich ein solcher Kreissektor von außen an Γ anlegen, so folgt $g \in C_\lambda(\mathbb{D}^{-1})$.
2. Sei Γ ein Quasikreis. Dann gilt $f \in C_\alpha(\bar{\mathbb{D}})$ für ein $\alpha > 0$. Aus $f \in C_\alpha(\bar{\mathbb{D}})$ folgt $g^{-1} \in C_\beta(\bar{\Omega}_2)$ mit $\beta = (2 - \alpha)^{-1}$. Die analoge Aussage bekommt man für g und f^{-1} .

Zum Beweis: LESLEY [L11] und [L12]. Bei stückweise glattem Rand beeinträchtigen nach innen weisende Ecken also die Regularität der konformen Kreisabbildung f^{-1} , nach außen weisende Ecken dagegen die ihrer Umkehrung f . Dies hat schon der Satz von LEHMAN ergeben.

Der Quasikreis Γ heißt zur Klasse $K(\alpha, \beta)$ gehörig, wenn die Abbildungen f und g folgende Hölderbedingungen erfüllen: $f^{-1} \in C_\alpha(\bar{\Omega}_1)$, $g \in C_\beta(\bar{R})$.

Beispiel 10 Der Rand eines L-förmigen Rechteckgebiets mit einem Außenwinkel und fünf Innenwinkeln von jeweils $\pi/2$ ist ein Quasikreis. f und g sind in $C_{1/2}$, ihre Umkehrungen in $C_{2/3}$. Der Rand liegt also in $K(2/3, 1/2)$. Der Rand konvexer Gebiete liegt in $K(1, 1)$. Für glatte Ränder kann man $0 < \alpha, \beta < 1$ beliebig wählen.

Für mehrfach zusammenhängende Gebiete gibt es ebenfalls konforme Abbildungen auf gewisse Standardgebiete. Während es im Fall des einfachen Zusammenhangs aber nur drei solche Gebiete (Kreis, C , \bar{C}) gibt, hat man bei zweifachem Zusammenhang für jedes $\mu \in (1, \infty]$ ein Standardgebiet. Bei m -fachem Zusammenhang, $m > 2$, sind es $3m - 6$ reelle Parameter μ_j . Den folgenden Satz entnehmen wir wieder [Go] (V, §4, Satz 4, dabei sei $\theta = \pi/2$, außerdem wird V, §1, Sätze 1,2, verwendet):

Satz 38 Sei Ω ein m -fach zusammenhängendes Gebiet mit den Randkomponenten Γ_j , $j = 1, \dots, m$. Dann gibt es (bis auf einen konstanten Faktor genau) eine konforme Abbildung von Ω auf einen Kreisring $\{z : R_1 < |z| < R_m\}$ mit $m - 2$ Kreisschlitzten der Radien R_j , $j = 2, \dots, m - 1$. Dabei soll Γ_1 dem inneren Kreis, Γ_m dem äußeren Kreis entsprechen. Die konformen Äquivalenzklassen solcher Gebiete sind durch die Verhältnisse der Radien R_j charakterisiert. Falls die Γ_j Jordankurven sind, läßt sich F zu einem Homöomorphismus¹ über die Ränder fortsetzen.

¹Die für $m > 2$ auftretenden Schlitzte werden in beiden Richtungen durchlaufen, „gegenüberliegende“ Punkte werden doppelt gezählt. Der Abstand ist das Infimum über die Durchmesser aller Verbindungskurven, die bis auf die Endpunkte ganz im Kreisring liegen.

Kapitel 11

Die Methode der Bergmanschen Kernfunktion

Problemstellung: Gegeben ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet Ω der Kreisklasse (mit „genügend glatem“ Rand). Gesucht ist eine numerisch auswertbare Approximation für eine Abbildung F , welche Ω auf die Einheitskreisscheibe konform abbildet.

F soll durch Vorgabe des Urbilds $\zeta \in \Omega$ des Ursprungs und durch die Bedingung $F'(\zeta) > 0$ normiert sein. Jede andere konforme Kreisabbildung von Ω läßt sich dann dadurch gewinnen, daß man einen geeigneten Automorphismus des Einheitskreises $w \mapsto e^{i\alpha} \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$, $z \in \mathbb{D}$, nachschaltet. Falls es gelingt, auch die Umkehrabbildung F^{-1} numerisch zu realisieren, kann man beliebige (genügend reguläre) Gebiete der Kreisklasse konform aufeinander abbilden.

Wir wollen im folgenden für die numerische Gewinnung der konformen Kreisabbildung F die Darstellung

$$F(z) = \sqrt{\frac{\pi}{k_B(\zeta, \zeta)}} \int_{\zeta}^z k_B(\zeta, w) dw \quad (7.13)$$

durch die Bergmansche Kernfunktion benutzen. Diese Methode wird die *Methode der Bergmanschen Kernfunktion*, *MBK*, genannt. Analog kann man auch Gleichung (8.4), also die Szegösche Kernfunktion, benutzen. Die Kernfunktionen lassen sich ihrerseits durch die Reihe

$$k_{B,S}(z, w) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\varphi_j(z)} \varphi_j(w) \quad (2.3)$$

darstellen. Dabei ist $\{\varphi_j, j \in \mathbb{N}\}$ ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem des Hilbertraums $L_B^2(\Omega)$ bzw. $L_S^2(\Omega)$. Wir approximieren die Kernfunktion durch eine endliche Teilsumme

$$k_n(z, w) := \sum_{j=1}^n \overline{\varphi_j(z)} \varphi_j(w). \quad (11.1)$$

Für die MBK (auf die wir uns hier beschränken wollen) bekommen wir so die Näherungen

$$F_n(z) := \sqrt{\frac{\pi}{k_n(\zeta, \zeta)}} \int_{\zeta}^z \sum_{j=1}^n \overline{\varphi_j(\zeta)} \varphi_j(w) dw \quad (11.2)$$

$$= \sum_{j=1}^n f_j \left(\Phi_j(z) - \Phi_j(\zeta) \right) \quad \text{mit} \quad (11.3)$$

$$f_j := \sqrt{\pi \cdot \overline{\varphi_j(\zeta)}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi_j(\zeta)|^2 \right)^{-1/2}, \quad (11.4)$$

wobei Φ_j beliebige Stammfunktionen der φ_j sind. Die Legitimation dieses Vorgehens liefert folgender

Satz 39 Die Folge F_n konvergiert in Ω punktweise und auf kompakten Teilmengen gleichmäßig gegen F . Auf jedem Kompaktum in Ω sind fast alle F_n konform.

Beweis: Nach Satz 20 konvergiert $k_n(\zeta, \cdot)$ auf Kompakta gleichmäßig gegen $k_B(\zeta, \cdot)$. Die $k_n(\zeta, \cdot)$ sind holomorph und fast alle nullstellenfrei, d.h. die F_n lokalkonform. Da die F_n bis auf einen Faktor die Stammfunktionen von $k_n(\zeta, \cdot)$ mit $F_n(\zeta) = 0$ sind, liefert Lemma 2 die kompakt-gleichmäßige Konvergenz. Daraus folgt wiederum für jede Folge $z_k \rightarrow z$ in Ω : $|F_n(z_k) - F(z)| \leq |F_n(z_k) - F(z_k)| + |F(z_k) - F(z)| \rightarrow 0$, $n, k \rightarrow \infty$. Wären unendlich viele F_{n_k} auf einem Kompaktum K nicht injektiv, so gäbe es in K zwei Folgen $\{z_k\}$ und $\{w_k\}$ mit $F_{n_k}(z_k) = F_{n_k}(w_k)$ und den Grenzwerten $z, w \in K$ (o.E., sonst nehme man Teilfolgen), woraus notwendig $F(z) = F(w)$ folgte. Also sind fast alle F_n konform. \square

Die Güte der Approximation für F gleicht (bis auf einen Faktor) auf kompakten Mengen derjenigen für die Kernfunktion: Sei K ein Kompaktum in Ω , $\zeta \in K$. Für jedes $z \in K$ sei γ_z der kürzeste Weg von ζ nach z , $M := \max\{|\gamma_z|, z \in K\} < \infty$. Für ein $\varepsilon > 0$ und $n > n_0(\varepsilon)$ sei $|k_n(\zeta, z) - k_B(\zeta, z)| < \varepsilon$ in ganz K . Dann ist $|F_n(z) - F(z)| = M_1 \cdot \left| \int_{\gamma_z} k_n(\zeta, w) dw - \int_{\gamma_z} k_B(\zeta, w) dw \right| \leq M_1 \cdot \int_{\gamma_z} |k_n(\zeta, w) - k_B(\zeta, w)| dw \leq M_1 |\gamma_z| \varepsilon \leq M_1 M \varepsilon$. Da auch die Gebiete der holomorphen Fortsetzbarkeit der beiden Funktionen übereinstimmen, lassen sich die Ergebnisse aus Kapitel 9 (insbesondere Satz 29) übertragen.

Da ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}$ des $L_B^2(\Omega)$ für ein allgemeines Gebiet gewöhnlich nicht explizit bekannt ist, muß es durch Orthonormieren aus einem linear unabhängigen, in $L_B^2(\Omega)$ vollständigen System ψ_j , $j \in \mathbb{N}$, berechnet werden. Die Orthonormierung erfolgt mit dem Verfahren von E. SCHMIDT:

$$\varphi_1 := \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|} \quad (11.5)$$

$$\tilde{\psi}_n := \psi_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \psi_n, \varphi_j \rangle \varphi_j \quad (11.6)$$

$$\varphi_n := \frac{\tilde{\psi}_n}{\|\tilde{\psi}_n\|} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (11.7)$$

Dabei ist wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der ψ_j stets $\|\tilde{\psi}_n\| > 0$. Seien $g_{jk} := \langle \psi_j, \psi_k \rangle$, $c_{jk} := \langle \psi_j, \varphi_k \rangle$ und

$$c_j^{-2} := \|\tilde{\psi}_j\|^2 = g_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} |c_{jk}|^2. \quad (11.8)$$

Dann ist $\varphi_j = c_j(\psi_j - \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk} \varphi_k)$, also

$$c_{nj} = c_j(g_{nj} - \sum_{k=1}^{j-1} \overline{c_{jk}} c_{nk}). \quad (11.9)$$

Wir setzen weiter rekursiv für $j = 1, 2, \dots, n$:

$$a_{jj} := c_j \text{ und } a_{jk} := -c_j \sum_{l=k}^{j-1} c_{jl} a_{lk}, \quad k = 1, \dots, j-1. \quad (11.10)$$

Dann bekommt man die Darstellung der Orthonormalfunktionen φ_j durch die Basisfunktionen ψ_k :

$$\varphi_j = \sum_{k=1}^j a_{jk} \psi_k. \quad (11.11)$$

Beweis: Induktion nach n : $\varphi_1 = a_{11} \psi_1$. Sei (11.11) für $j = 1, \dots, n-1$ vorausgesetzt, dann folgt $\varphi_n = c_n(\psi_n - \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} \varphi_j) = a_{nn} \psi_n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (-c_n \sum_{j=k}^{n-1} c_{nj} a_{jk})}_{=a_{nk}} \psi_k$. \square

Die Identitäten (11.8) bis (11.10) erlauben die Umrechnung der Gramschen Matrix

$$G_n = (g_{jk})_{j,k=1}^n, \quad g_{jk} = \langle \Psi_j, \Psi_k \rangle = \int_{\Omega} \Psi_j(z) \overline{\Psi_k(z)} dz \quad (11.12)$$

in die Koeffizientenmatrix $A_n = (a_{jk})$. Da G_n hermitesch ist, sind nur die $n(n+1)/2$ Elemente g_{jk} , $k \leq j$, zu berechnen. Unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen kann das Flächenintegral in (11.12) mit einer Greenschen Formel

$$\int_{\Omega} \Psi_j(z) \overline{\Psi_k(z)} dz = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} \Psi_j(z) \overline{\Psi_k(z)} dz = \frac{1}{2i} \int_I \Psi_j(z(t)) \overline{\Psi_k(z(t))} \dot{z}(t) dt \quad (11.13)$$

in ein Randintegral umgewandelt werden. Hierbei sei $\partial\Omega$ Spur einer positiv orientierten, stückweise stetig differenzierbaren Parametrisierung $z(t)$ über dem Intervall I , und die Ψ_k seien (beliebige) Stammfunktionen der ψ_k . Die folgende Version der Greenschen Formel erweist sich als für unsere Zwecke stets anwendbar:

Lemma 6 *Seien f, g im stückweise glatt berandeten Gebiet Ω holomorph, f', g' noch stückweise stetig auf den Rand fortsetzbar. An einem Unstetigkeitspunkt z_0 sei der Integrand des Flächenintegrals beschränkt durch $|z - z_0|^{\varepsilon-2}$, der des Linienintegrals durch $|z - z_0|^{\varepsilon-1}$, $\varepsilon > 0$. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} f(z) \overline{g'(z)} dz = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} f(z) \overline{g(z)} dz. \quad (11.14)$$

Beweis: Das Flächenintegral (bzw. das Randintegral) über einer Menge $U_{\delta}(z_0) \cap \Omega$ (bzw. $\partial U_{\delta}(z_0) \cap \Omega$) existiert unter den obigen Voraussetzungen und strebt für $\delta \rightarrow 0$ gegen 0. Dann läßt sich die übliche Greensche Formel (f', g' überall auf dem Rand stetig, vgl. GAIER [Ga2, S.18]) auf $\Omega \setminus U_{\delta}(z_0)$ anwenden und man bekommt für $\delta \rightarrow 0$ die behauptete Verallgemeinerung. \square

Die verbleibenden Integrale über ein endliches reelles Intervall können gewöhnlich effektiv mit Gaußschen Quadraturformeln genügend hoher Ordnung ausgewertet werden. Auch die Summe (11.3) für F_n ist mit den Funktionen Ψ_j darstellbar:

$$F_n(z) = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j (\Psi_j(z) - \Psi_j(\zeta)), \quad (11.15)$$

$$\tilde{f}_j := \sqrt{\pi} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi_k(\zeta)|^2 \right)^{-1/2} \underbrace{\sum_{k=j}^n \overline{\varphi_k(\zeta)} a_{kj}}_{=: b_j}. \quad (11.16)$$

Für jeden Punkt $z \in \Omega$, an dem die konforme Transformation berechnet werden soll, sind im wesentlichen die n Stammfunktionen $\Psi_j(z)$, $j = 1, \dots, n$, der Basisfunktionen ψ_j auszuwerten.

Da $k_n(\zeta, \cdot) = \sum_{j=1}^n b_j \psi_j$ gerade die Orthogonalprojektion von K_{ζ} in den von ψ_j , $j = 1, \dots, n$, aufgespannten Raum ist, gilt $\overline{\Psi_k(\zeta)} = \langle K_{\zeta}, \Psi_k \rangle = \langle k_n(\zeta, \cdot), \Psi_k \rangle = \sum_{j=1}^n b_j \langle \psi_j, \Psi_k \rangle$. Mit den Spaltenvektoren

$y = \left(\overline{\Psi_k(\zeta)} \right)_{k=1}^n$ und $b = (b_j)_{j=1}^n$ bekommt man das lineare Gleichungssystem

$$G_n b = y \quad (11.17)$$

(mit hermiteschem und positiv definiten G_n) für die Koeffizienten b_j der Funktion $k_n(\zeta, \cdot)$ bezüglich der Basisfunktionen ψ_j . Hiermit kann man die Koeffizienten \tilde{f}_j der Kreisabbildung ebenfalls nach Gleichung (11.16) berechnen, ohne die Matrix A_n zu kennen:

$$\tilde{f}_j = \sqrt{\pi} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n b_k \Psi_k(\zeta) \right)}_{=: k_n(\zeta, \zeta)}^{-1/2} b_j. \quad (11.18)$$

Die numerische Konstruktion der konformen Kreisabbildung eines stückweise glatt berandeten beschränkten Gebiets der Kreisklasse bewerkstelligt also jede der beiden Varianten des folgenden

Algorithmus 1 Gegeben sei

- ein Gebiet Ω durch eine positiv orientierte, stückweise stetig differenzierbare Parametrisierung des Randes: $\partial\Omega = \{z(t), t \in I\}$,
- ein (für die Greensche Formel geeignetes) in $L_B^2(\Omega)$ vollständiges System linear unabhängiger Funktionen ψ_j mit ihren Stammfunktionen $\Psi_j, j \in \mathbb{N}$.

Für ein vorgegebenes n wird berechnet:

Gram die Gramsche Matrix G_n über die Formel (11.13),

Orthog die Koeffizientenmatrix $A_n = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ für die Darstellung (11.11)

oder

LGS der Lösungsvektor b des Gleichungssystems (11.17),

Koeff die Koeffizienten $\tilde{f}_j, j = 1, \dots, n$, für die Summe (11.15),

Test die Näherung F_n für die Abbildung F an einigen Testpunkten auf dem Rand.

Mit der Abweichung der Bilder der Testpunkte von der Kreislinie, d.h. dem radialen Fehler $||F_n(z)| - 1|$, läßt sich die Güte der Approximation beurteilen. Nötigenfalls kann man die Approximationsordnung n erhöhen. Die Matrizen G_n und A_n brauchen dazu nur um weitere Zeilen ergänzt zu werden. Analog läßt sich bei der Auflösung des Gleichungssystems (11.17) nach Cholesky die dort berechnete Dreieckszerlegung $G = LL^*$ erweitern. Die Koeffizienten \tilde{f}_j werden neu berechnet. Allerdings läßt sich durch Vergrößerung von n keine beliebige Verbesserung der Genauigkeit erzielen. Der geringere Approximationsfehler wird schließlich durch Rundungsfehler überkompensiert. Wir werden daher noch ein genaueres Kriterium für die Fortsetzung des Verfahrens angeben müssen, das neben einer vorgegebenen Zielgenauigkeit auch den Einfluß von Rundungsfehlern und eine aufkommende Instabilität berücksichtigt.

Der Rechenaufwand für den gesamten Algorithmus liegt in der Größenordnung von n^3 . Dies wird durch den zweiten Schritt, das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren bzw. das Cholesky-Verfahren bestimmt. Als elementare Rechenoperationen kann man Paare aus Multiplikation und Addition betrachten. Im ersten Schritt sind größenordnungsmäßig n^2 Integrale auszuwerten. Da diese Operationen aber wesentlich mehr Rechenaufwand erfordern, dominiert die Rechenzeit für den ersten Teil des Algorithmus bei den in der Praxis üblichen Werten von n . Verwendet man Gaußsche Quadraturformeln der Ordnung m , so sind pro Integral m (oder ein Vielfaches davon, wenn das Integrationsintervall in mehrere Teilintervalle unterteilt wird) Auswertungen von $\psi_j, \Psi_j, z(t)$ und $\dot{z}(t)$ vorzunehmen. Die tatsächliche Rechenzeit wird stark von der Komplexität der Basisfunktionen ψ_j bzw. Ψ_j beeinflusst. Es muß betont werden, daß nach der Bestimmung der Koeffizienten \tilde{f}_j die konforme Kreisabbildung an beliebigen Punkten mit n -linearem Aufwand ausgewertet werden kann. Der Gesamtfehler bei dem beschriebenen Verfahren setzt sich zusammen aus

1. dem Abbruchfehler wegen der Ersetzung der exakten Kreisabbildung F durch die Näherung F_n ,
2. den Rundungsfehlern in der Summe für F_n , bei der Berechnung der Koeffizienten \tilde{f}_j , sowie bei der Orthonormierung/Gleichungsauflösung,
3. den Rundungs- und Diskretisationsfehlern, mit denen die Einträge der Gramschen Matrix behaftet sind.

Die Rundungsfehler unter 2. wollen wir nicht weiter betrachten, sie spielen gewöhnlich keine so entscheidende Rolle. Insbesondere werden damit die beiden Varianten des Algorithmus, durch direkte Lösung des Gleichungssystems (11.17) und durch Orthonormierung, als gleichwertig betrachtet. Die unter 3. genannten Fehler setzen dagegen der Verkleinerung des Abbruchfehlers oft enge Grenzen. Dies liegt an der grundsätzlichen Instabilität des Problems. Gerade dann, wenn man schon eine gute

Näherung gefunden hat, die Basisfunktionen also auch untereinander bereits recht „dicht“ liegen, wirken sich die Fehler in den g_{jk} besonders verheerend aus. Eine Erhöhung der Approximationsordnung über einen bestimmten Wert hinaus bringt keine Verbesserung mehr. Nach (11.7) ist zur Normierung der Funktion $\tilde{\Psi}_n$ diese mit dem Kehrwert ihrer Norm zu multiplizieren. Damit werden nach (11.8) bis (11.10) auch die (durch die Fehler in den g_{nj} und den bereits berechneten a_{lk} entstehenden absoluten) Fehler in den a_{jk} entsprechend vergrößert. $\|\tilde{\Psi}_n\|$ ist aber gerade der Abstand von Ψ_n vom Raum $\text{span}\{\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}\}$. Es sei

$$I_{nj} := \|\Psi_j\|^{-2} \text{dist}(\Psi_j, \text{span}\{\Psi_1, \dots, \Psi_{j-1}, \Psi_{j+1}, \dots, \Psi_n\})^2.$$

Dann ist $IS_n := \min\{I_{nj}, j = 1, \dots, n\}$ ein von der Skalierung der Ψ_j und ihrer Reihenfolge unabhängiges Maß für die Stabilität des Orthonormierungsprozesses. IS_n nimmt den maximal möglichen Wert 1 genau dann an, wenn bereits ein orthogonales System vorliegt.

Die Abhängigkeit des Fehlers im Koeffizientenvektor b von den Fehlern in der Matrix G_n (und in y) kann man durch die Konditionszahl $C := \text{Cond}(G_n) = \|G_n\| \|G_n^{-1}\| \geq 1$ (bezüglich der Spektralnorm $\|A\| := \text{lub}(A)$) der Gramschen Matrix beschreiben. Ist $r_b := \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$ der relative Fehler von b und $r_G := \frac{\|G_n - \tilde{G}_n\|}{\|G_n\|}$ der relative Fehler von G_n , so gilt: $r_b \leq \frac{Cr_G}{1 - Cr_G}$ (falls Nenner < 1). Wir wollen noch eine dritte, leichter zu berechnende Mazahl für die Stabilität der Berechnung der f_j aus G_n betrachten: Sei $a_j^{(n)}$ der j -te Spaltenvektor von A_n ,

$$\tilde{I}_{nj} := \left\| a_j^{(n)} \right\|^{-2} \cdot \|\Psi_j\|^{-2}, \quad \tilde{IS}_n := \min\{\tilde{I}_{nj}, j = 1, \dots, n\}. \quad (11.19)$$

Mit der zu A_n inversen Matrix H_n , (d.h. es gilt die Beziehung $\Psi_i = \sum_{k=1}^n h_{ik} \Phi_k$) haben wir: $(A_n A_n^*)^{-1} = H_n H_n^* = (\sum_{k=1}^n h_{ik} \bar{h}_{jk}) = (\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle)_{ij} = G_n$, also $G_n^{-1} = A_n A_n^* = A_n^* A_n$. Hieraus folgt $\tilde{I}_{nj}^{-1} = \|A_n e_j\|^{-2} \|\Psi_j\|^2 = e_j^T G_n^{-1} e_j \|\Psi_j\|^2$, e_j j -ter Einheitsvektor. Man hat (vgl. [PW]) den folgenden

Satz 40 (Taylor) Sei \hat{G}_n die „normierte“ Gram-Matrix $\left(\frac{\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle}{\|\Psi_i\| \|\Psi_j\|} \right)_{ij}$. Dann ist für alle $j = 1, \dots, n$: $\text{Cond}(\hat{G}_n) \geq \tilde{I}_{nj}^{-1} \geq I_{nj}^{-1}$, d.h. $\text{Cond}(\hat{G}_n) \geq \tilde{IS}_n^{-1} \geq IS_n^{-1}$.

Da in die Definition von \tilde{I}_{nj} nur die Elemente der Matrizen A_n und G_n eingehen, kann man diese Zahl in der Orthonormierungsprozedur leicht berechnen: $\tilde{I}_{nj}^{-1} = (\sum_{k=1}^n |a_{kj}|^2) g_{jj} = \tilde{I}_{n-1,j}^{-1} + |a_{nj}|^2 g_{jj}$, $j = 1, \dots, n-1$, und $\tilde{I}_{nn}^{-1} = I_{nn}^{-1} = |a_{nn}|^2 g_{nn}$. Die Konditionszahl der Matrix \hat{G}_n läßt sich mit einer Singuläre-Werte-Zerlegung ermitteln. Die Kondition ist das Verhältnis vom größten zum kleinsten singulären Wert.

Die Nachteile der numerischen Instabilität des Orthonormierungsverfahrens bzw. der Gleichungsauflösung kann man vermeiden, wenn man symbolisch rechnet. Dazu sind zunächst geschlossene Ausdrücke für die Randintegrale

$$g_{jk} = \frac{1}{2i} \int_I \Psi_j(z(t)) \overline{\Psi_k(z(t))} \dot{z}(t) dt$$

zu finden. Dies gelingt im allgemeinen nur bei stückweise geradlinigem Rand und mit polynomialem oder evtl. gebrochen rationalen Ansatzfunktionen. Mit geeigneter Software wie MATHEMATICA oder MAPLE bekommt man dann zuverlässige Ergebnisse. In komplizierteren Fällen, wenn etwa elliptische Integrale auftreten, bekommt man gelegentlich noch eine Darstellung mit den zugehörigen speziellen Funktionen, Erfolg und Rechenzeit hängen freilich stark von der Form des eingegebenen Integranden ab. Bei rationalen Ansatzfunktionen muß die Faktorisierung von Nennerpolynomen mit ganzen Koeffizienten möglich sein. Nähere Angaben zu dieser Methode und einige Beispiele finden sich bei G. JANK und L.H. TACK [JaTa]. Dort wurden die symbolisch ermittelten Integrale vor der numerisch durchgeführten Orthonormierungsprozedur mit hoher Genauigkeit ausgewertet. Eine symbolische Orthonormierung würde zu viel Speicherplatz und Rechenzeit beanspruchen. Da

diese Methode ihre Vorteile erst bei höheren Approximationsordnungen zeigt, sollte hier die Rechenzeit (JANK & TACK geben 1–10 Stunden auf einem 68020-Rechner an) eigentlich durch Orthonormierung/Gleichungsauflösung dominiert werden. Allerdings werden auch die Ausdrücke für die Integranden selbst bei Monomen als Ansatzfunktionen mit wachsendem n komplizierter und die symbolische Rechnung geht (zumindest mit MATHEMATICA) erstaunlich langsam vonstatten. Effektivere Hard- und Software für das symbolische Rechnen könnte die Praktikabilität dieser Variante wohl noch verbessern.

Kapitel 12

Approximation mit Polynomen

In diesem Paragraphen benutzen wir zur Approximation der konformen Kreisabbildung F Polynome F_n vom Grad n . Für die Methode der Bergmanschen Kernfunktion heißt dies, daß F_n unter allen Polynomen p_n vom Grad n mit vorgegebener Nullstelle $\zeta \in \Omega$ und dort positiver Ableitung dasjenige ist, für welches $\|F' - p_n'\|_{L^2_B(\Omega)}$ minimal wird. Die Polynome $\pi_n := F_n'(\zeta)^{-1} \cdot F_n$, deren Ableitung bei ζ zu 1 normiert ist, heißen *Bieberbach-Polynome*. In einigen der unten zitierten Sätze werden statt der F_n die Bieberbachpolynome benutzt; da beide Polynomsysteme aber bis auf einen Faktor übereinstimmen, ändert dies an den aufgeführten (asymptotischen) Aussagen nichts. Außerdem wird gewöhnlich $\zeta = 0$ gesetzt.

Daß die Polynomapproximation grundsätzlich sinnvoll ist, folgt aus der Dichtheit der Polynome im Raum $L^2_B(\Omega)$ für alle hier betrachteten Gebiete Ω (Jordangebiete mit stückweise glattem Rand). Außerdem sind die Monome linear unabhängig. Der Algorithmus 1 liefert die Näherungen F_n mit den Basisfunktionen $\psi_j(z) = \eta_j(z) = z^{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$. Die Greensche Formel zur Umwandlung der Flächenintegrale in Randintegrale bereitet hier keine Schwierigkeiten.

Da das asymptotische Approximationsverhalten der F_n demjenigen von F_n' entspricht, kann man Satz 29 benutzen und bekommt:

Proposition 17 Sei Ω ein Jordangebiet mit Randkurve Γ . Falls die konforme Kreisabbildung F noch innerhalb der Niveaulinie Γ_R holomorph fortsetzbar ist, R maximal, so gilt

$$\max\{|F(z) - F_n(z)| : z \in \bar{\Omega}\} \in O(r^{-n}) \quad (12.1)$$

für jedes $r < R$ aber kein $r > R$.

Die Approximation wird also umso besser sein, je weiter die Kreisabbildung über den Rand des Gebiets hinaus holomorph fortgesetzt werden kann. Wenn das Gebiet analytisch berandet oder ein Polygon mit Innenwinkeln von $\pi/2, \pi/3, \dots$ ist, dann gibt es ein $R > 1$ mit der obigen Eigenschaft. In den anderen Fällen —selbst wenn analytische Randstücke sich ohne Knick oder gar C^∞ -glatt aneinander anschließen— hat man gewöhnlich ein sehr viel schlechteres Approximationsverhalten. Die folgenden Resultate stammen von GAIER [Ga3]:

Satz 41 Sei Ω ein beschränktes Jordangebiet mit Randkurve Γ , Kreisabbildung F und den oben erklärten Polynomapproximationen F_n vom Grad n .

1. Sei Γ stückweise glatt und $\lambda\pi$ der kleinste Außenwinkel zwischen zwei glatten Randstücken, $0 < \lambda < 2$. Dann gibt es eine Konstante $M > 0$ mit

$$|F(z) - F_n(z)| \leq Mn^{-\gamma}, \quad z \in \bar{\Omega}, \quad (12.2)$$

für beliebiges $\gamma < \min\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}, \frac{1}{2}\right)$.

2. Sei $\Gamma \in K(\alpha, \beta)$ (wie in Kapitel 10). Dann gilt (12.2) für alle $\gamma < \frac{\alpha\beta}{2}$.

Ebenfalls von GAIER [Ga3] stammen die inversen Ergebnisse:

Satz 42 Sei Ω ein Jordangebiet mit stückweise glattem Rand und z_0 eine Ecke zwischen glatten Randstücken mit Außenwinkel $\lambda\pi$, $0 < \lambda < 2$. Falls

1. $0 < \lambda < 1$ gilt, oder
2. bei z_0 zwei Strecken aufeinandertreffen und $(2 - \lambda)^{-1} \notin \mathbb{N}$ liegt,

dann folgt aus

$$\max\{|F(z) - F_n(z)|, z \in \overline{\Omega}\} \in O(n^{-\gamma}) \quad (12.3)$$

stets $\gamma \leq \frac{\lambda}{2-\lambda}$.

Für glattere Ränder gibt es u.a. Aussagen von SUETIN [Su], hier sollen nur die beiden folgenden zitiert werden:

Satz 43 Sei Ω ein Gebiet mit rektifizierbarer (geeignet parametrisierter) Randkurve Γ , F , F_n wie üblich, $\varepsilon_n := \max\{|F(z) - F_n(z)|, z \in \overline{\Omega}\}$.

1. Sei $\Gamma \in C_{\alpha}^p$, d.h. $\Gamma^{(p)}(z)$ liegt in der Hölderklasse zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$. Dann gilt für $p + \alpha \geq 7/4$:

$$\varepsilon_n \in O(n^{-p-\alpha} \log n). \quad (12.4)$$

2. Sei $\Gamma \in C_{\alpha}^1$, $\alpha > 0$. Dann ist

$$\varepsilon_n \in O(n^{-\alpha-1/2} \sqrt{\log n}). \quad (12.5)$$

Bemerkung 5

1. Ist Ω konvex, so ist in 2. von Satz 41 $\alpha = \beta = 1$, also gilt (12.2) für alle $\gamma < 1/2$. Ist Ω C^1 -berandet, so folgt ebenfalls $\gamma < 1/2$ beliebig.

2. Die zweite Aussage von Satz 41 liefert (nach Satz 37) nur ein halb so großes γ (falls $< 1/2$) wie die erste. Man beachte aber, daß die Voraussetzung der zweiten Aussage schwächer ist, als die der ersten Aussage.

3. Für $\lambda \leq 2/3$ folgt aus Satz 42, daß Satz 41-1 nicht verbessert werden kann.

4. Im zweiten Fall von Satz 42 würde $(2 - \lambda)^{-1} \in \mathbb{N}$ nur eine Nullstelle von F' bei z_0 liefern, F könnte also noch holomorph über den Rand fortgesetzt werden —was eine exponentielle Fehlerabnahme zur Folge hätte.

5. Gemessen an der Zahl der gültigen Stellen der Näherung wächst der Aufwand bei den Gebieten in Satz 42 notwendig exponentiell. Auch die Ergebnisse von SUETIN für glattere Ränder liefern in diesem Sinn kein qualitativ besseres Verhalten. Falls die Kreisabbildung aber über den Rand hinaus holomorph fortsetzbar ist, wächst der Rechenaufwand nur polynomial mit der Stellenzahl.

Auch über die Stabilität des Orthonormierungsverfahrens sind im Falle der Polynomapproximation Aussagen möglich (vgl. PAPAMICHAEL & WARBY [PW]):

Satz 44 Sei $\Omega \ni 0$ ein stückweise analytisch berandetes Gebiet ohne Spitzen, $c = \text{cap}(\partial\Omega)$ die Kapazität des Randes, $d := \sup\{|z| : z \in \Omega\}$ und $\delta := (c/d)^2$. Dann ist $\frac{1}{16} \leq \delta \leq 1$. Weiter gibt es eine Konstante $\beta > 0$, daß für alle $n > 1$ gilt:

$$I_{nn} \leq \beta(n-1)\delta^{n-1}. \quad (12.6)$$

Falls $\partial\Omega$ analytisch ist, gibt es Konstanten $\beta > 0$, $\gamma > 0$ und $0 < r_0 < c$ mit

$$\delta^n \left(1 - \gamma \left(\frac{r_0}{c}\right)^{2n-2}\right) \leq I_{nn} \leq \beta\sqrt{n}\delta^{n-1}. \quad (12.7)$$

Das Verfahren wird instabil, wenn Ω nicht gerade ein Kreis um den Entwicklungspunkt 0 der Monome ist. Dann unterscheidet sich Ω nämlich um mehr als eine Nullmenge von diesem Kreis (sonst wären die Polynome nicht dicht) und nach Kapitel 10 folgt aus Monotoniegründen $c < d$. Immerhin kann das Ausmaß der Instabilität (zumindest bei analytischem Rand) nicht beliebig schnell anwachsen. Selbst bei ungünstigen (sehr flachen) Gebieten ist das Verfahren bis zu einem gewissen Polynomgrad durchführbar. Ist Ω fast eine Strecke und liegt 0 nahe an einem Ende des Gebiets, so liegt δ nahe bei $\frac{1}{16}$, bei zentraler Lage von 0 dagegen bei $\frac{1}{4}$.

Nach GAIER [Gal, S. 138] und SÜETIN [Su] gilt mit den monomialen Ansatzfunktionen η_j , d.h. mit den polynomialen Orthonormalfunktionen $\rho_j(z) = \sum_{k=1}^j a_{jk} z^{j-1}$, in rektifizierbar berandeten Gebieten:

$$\sqrt{\frac{n-1}{n}} \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \rightarrow F_\infty, \quad (12.8)$$

wobei F_∞ die bei ∞ normierte Abbildung des Außengebiets auf das Äußere des Einheitskreises ist. Damit läßt sich insbesondere das Niveau R einer bekannten Singularität für eine zu approximierende Funktion in Satz 29 bzw. der Kreisabbildung in Proposition 17, also die Geschwindigkeit der Polynomapproximation, bestimmen. Weiter gilt

$$c = F'_\infty(\infty)^{-1} \approx \sqrt{\frac{n}{n-1}} \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{nn}}, \quad (12.9)$$

was eine Möglichkeit eröffnet, die Kapazität von $\partial\Omega$ zu berechnen. Aus den oben zitierten asymptotischen Fehlerabschätzungen lassen sich außerdem die Konstanten R bzw. γ experimentell bestimmen, wenn man den maximalen Fehler ε_n von F_n kennt. In der Praxis wird man anstelle von ε_n den leicht zu ermittelnden maximalen radialen Fehler $e_n := \max_k |F_n(z_k)| - 1|$ an einigen Testpunkten $z_k \in \partial\Omega$ (vorzugsweise „pathologische“ Punkte, wie Ecken) nehmen. Mit der Methode der kleinsten Quadrate kann dann die Folge der e_n an die betreffende Fehlerformel optimal angepaßt werden. Auf ähnliche Weise lassen sich die Stabilitätsaussagen überprüfen.

Die Polynomnäherung bietet neben den vielfältigen theoretischen Ergebnissen auch eine Reihe von praktischen Vorteilen. Zunächst einmal können die Monome $\eta_j(z) = z^{j-1}$ bei kleinem j schneller durch mehrfache Multiplikationen ausgewertet werden, als über die transzendenten Exponential- und Logarithmusfunktionen: Man kommt so mit nur $2 \lceil \log_2 j \rceil$ komplexen Multiplikationen pro Funktionsauswertung aus. Da man mit Polynomen leicht symbolisch rechnen kann, eignen sie sich besonders für die schon angesprochene symbolische Methode von JANK & TACK, insbesondere wenn Ω ein Polygon ist — natürlich erhält man dann auch mit der Gaußquadratur gute numerische Werte für die Integrale. Aus demselben Grund bieten Polynome die Möglichkeit, die *Szegösche Kernfunktion* zur Kreisabbildung heranzuziehen. In diesem Fall erfolgt die Orthonormierung über das Randintegral $\langle f, g \rangle = \int_\Gamma f(\Gamma(t)) \overline{g(\overline{\Gamma(t)})} |\dot{\Gamma}(t)| dt$. Man bekommt wie bei der Methode der Bergmanschen Kernfunktion eine Näherung — jetzt der Szegöschen Kernfunktion. Ihr (symbolisch ermitteltes) Quadrat approximiert die Bergmansche Kernfunktion, die Stammfunktion \tilde{F}_n (mit Nullstelle ζ) die konforme Kreisabbildung F . In numerischen Versuchen hat sich diese Methode im Vergleich zur MBK als etwas günstiger erwiesen (vgl. [Gal, S. 153, 154]).

Ein weiterer Vorteil der Polynomnäherungen für F besteht darin, daß man das „reverse“ Polynom (symbolisch, z.B. mit MATHEMATICA) berechnen kann, welches die inverse Abbildung $F^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ approximiert. Auch wenn man damit oft nur eine grobe Näherung bekommt, so läßt sich diese doch vorteilhaft als Startwert für das Newtonverfahren mit einer besseren Approximation der Kreisabbildung verwenden.

Wir wollen nun einige numerische Beispiele betrachten. Benutzt wird jeweils die Methode der Bergmanschen Kernfunktion mit den Monomen $\eta_j(z) = z^{j-1}$ als Ansatzfunktionen. Der Algorithmus 1 dient zur Berechnung der Koeffizienten \tilde{f}_j für $F_n(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{f}_j}{j} z^j$. Das zugehörige Programm ist im

Anhang abgedruckt und dokumentiert. Die Approximationsordnung n wird so lange erhöht, bis ein Fehler auftritt oder eine Verbesserung in mehreren Schritten hintereinander ausbleibt. Als Modellgebiete werden betrachtet

- Rechtecke mit verschiedenen Seitenverhältnissen,

- ein L-förmiges Rechteckgebiet,
- ein herzförmiges Kreisbogendreieck mit zwei gestreckten Winkeln und einem rechten Außenwinkel,
- Gebiete mit genau einer Ecke: $(\mathbb{D} + 1)^\alpha$, $0 < \alpha \leq 2$, $\zeta = 1$,
- die dreibogige Astroide (mit Außenspitzen).

Beispiel 11 Rechtecke (normiert in $\zeta = 0$, was bis auf eine Ausnahme auch der Mittelpunkt ist). Zunächst soll das Quadrat $(-1, 1) \times (-1, 1)$ etwas genauer behandelt werden. Wir stellen dieses durch vier geradlinige Randkurven $z_j : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $z_j(s) := s \cdot i^j + i^{j-1}$, $j = 1, 2, 3, 4$, dar. Man beachte, daß das Quadrat invariant unter Drehungen um $\zeta = 0$ mit Winkeln $k\pi/2$, $k \in \mathbb{N}$, ist. Daher ist $K_0 = k_B(0, \cdot)$ invariant bezüglich Multiplikation mit i oder -1 . Da aber $(-z)^{2k+1} = -z^{2k+1}$ und $(iz)^{4k+2} = -z^{4k+2}$, $k \in \mathbb{N}$, gilt, folgt $K_0 \perp z^k$ für $k \not\equiv 0 \pmod{4}$. Ebenso sind die Systeme $H_j = \{z^k : k \equiv j \pmod{4}\}$, $j = 0, 1, 2, 3$, zueinander orthogonal. Man kann K_0 in dem von H_0 erzeugten Hilbertraum approximieren und braucht nur die Monome $\psi_k(z) = z^{4(k-1)}$, $k \in \mathbb{N}$, zu berücksichtigen. Als Testpunkte verwenden wir unter anderem eine Ecke und einen Seitenmittelpunkt. Die folgende Tabelle zeigt den ermittelten maximalen radialen Fehler e_n an den Testpunkten, die Kondition der normierten Gramschen Matrix, die Zahl Z_n der Auswertungen des Integranden und die bis dahin verbrauchte Rechenzeit (in Sekunden). Alle diese Werte gelten für die Berechnung der Koeffizienten \tilde{f}_j über die Lösung des Gleichungssystems (11.17). In den rechten Spalten sind zum Vergleich noch die Daten der Variante mit Orthonormierung aufgeführt: maximaler Fehler e_n^* , Stabilitätszahl $\tilde{I}S_n^{-1}$ und die Rechenzeit. Es treten nur die Polynomgrade 1, 5, 9, ... (bei F_n) auf.

n	e_n	Cond \hat{G}_n	Z_n	Zeit	e_n^*	$\tilde{I}S_n^{-1}$	Zeit
1	2.533E-01	1	244	0.23	2.533E-01	1	0.23
5	2.162E-02	1.8	732	0.97	2.162E-02	1.1	0.99
9	2.571E-03	7.3	1464	2.30	2.571E-03	2.3	2.31
...
53	9.008E-14	4.8E+09	25620	61.68	9.294E-14	1.8E+08	61.69
57	2.554E-14	3.2E+10	29280	71.71	3.045E-14	1.2E+09	71.96
61	5.360E-14	2.2E+11	33184	83.00	5.887E-14	2.2E+11	83.33

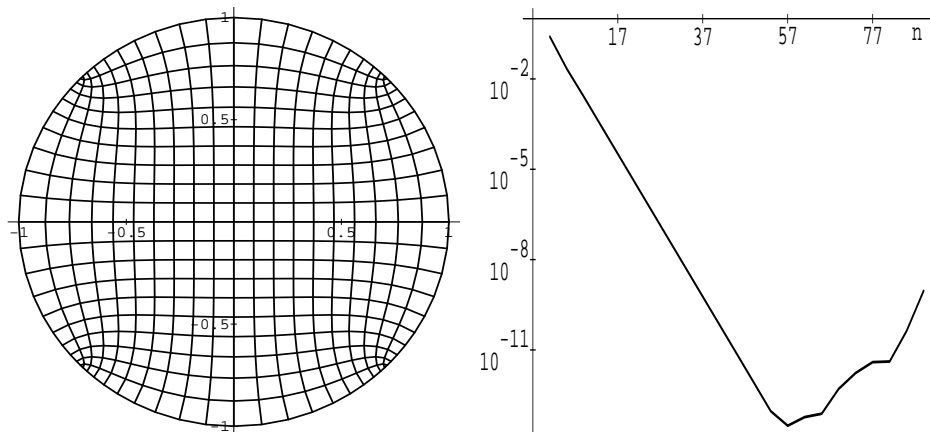


Abbildung 12.1: Konforme Kreisabbildung des Quadrats (Bild eines äquidistanten kartesischen Gitters) und logarithmische Darstellung des maximalen Fehlers.

Bei höheren Approximationsordnungen steigt der Fehler wieder an. Die optimale Approximation bekommt man für den Polynomgrad $57 = 14 \cdot 4 + 1$ mit 15 Ansatzfunktionen. Der Vergleich mit einer symbolisch ermittelten Gram-Matrix zeigt, daß die durch numerische Integration gewonnenen

Einträge als auf mindestens 14 Stellen genau anzusehen sind. Der maximale Fehler genügt ziemlich genau der Formel $e_n \approx 0.33 \cdot 1.73^{-n}$, das Niveau der Polstelle 2 ist 1.72, Formel (12.1) wird durch das Experiment gut bestätigt. Man beachte, daß erst im letzten erfolgreichen Schritt nicht mehr die erwartete Verbesserung eintritt, das Verfahren also ziemlich plötzlich zusammenbricht. Der Vergleich zwischen den beiden Varianten des Algorithmus 1 ergibt, daß sowohl die Genauigkeit, als auch die Rechenzeit praktisch identisch sind. Erst ab der optimalen Approximationsordnung weichen die Fehler merklich voneinander ab, bleiben aber in der gleichen Größenordnung. Theoretisch sollte die Methode der Gleichungsauflösung in der Rechenzeit günstiger sein, der Gesamtaufwand wird aber durch die numerischen Integrationen im Schritt GRAM dominiert. Entsprechend wächst die Rechenzeit auch fast genau quadratisch, der kubische Anteil ist vernachlässigbar.

Die verschiedenen Stabilitätsindikatoren zeigen ein untereinander recht ähnliches Verhalten. $\text{Cond } \hat{G}_n$ wächst am schnellsten, nämlich exponentiell zur Basis 1.6, $\tilde{I}S_n^{-1}$ wächst zur Basis 1.45 und I_{nn}^{-1} zu 1.41, was gut mit $\delta^{-1} = 1.43$ in Formel (12.6) und Satz 40 übereinstimmt.

Trotz der hohen Genauigkeit der Polynomapproximation für F liefert das reverse Polynom auf dem Rand nur eine mäßige Näherung für F^{-1} . Dies dürfte daran liegen, daß F^l an den Ecken Nullstellen hat, also $(F^{-1})^l$ unbeschränkt ist. Der Konvergenzradius der exakten Potenzreihe ist 1.

Die flacheren Rechtecke ergeben eine wesentlich geringere Genauigkeit. Zum einen liegt die dem Rand am nächsten gelegene Polsingularität auf einem niedrigeren Niveau, d.h. die Konvergenz ist langsamer; zum anderen macht sich die Instabilität der Orthonormierung/Gleichungsauflösung früher bemerkbar. Beim asymmetrisch (gegenüber $\zeta = 0$) gelegenen Rechteck $(-2, 2) \times (-0.75, 1.25)$ nimmt der Fehler sehr ungleichmäßig ab, dennoch liefert die Methode der kleinsten Quadrate recht genau die nach Proposition 17 zu erwartende Formel. Die folgende Tabelle zeigt —abhängig vom Seitenverhältnis a — den Fehler $e_{n_{opt}}$ beim optimalen Polynomgrad n_{opt} , den experimentell ermittelten Wert R_0 für die Konvergenzgeschwindigkeit, das niedrigste Niveau R einer Polstelle, den Wert von δ aus Satz 44, die experimentell ermittelten Wachstumsordnungen δ_0 der Größe I_{nn} und δ_I von $\tilde{I}S_n$, sowie die Stabilitätszahl $\tilde{I}S_{n_{opt}}^{-1}$:

a	n_{opt}	$e_{n_{opt}}$	R_0	R	δ_I	δ_0	δ	$\tilde{I}S_{n_{opt}}^{-1}$
1	57	3.0E-14	1.73	1.72	0.69	0.71	0.70	1.2E+09
2	61	1.2E-08	1.40	1.41	0.53	0.62	0.61	6.6E+15
2 (asym)	^a 35	2.2E-05	1.30	1.30	0.42	0.57	0.55	2.7E+12
4	39	3.4E-04	1.23	1.22	0.38	0.47	0.45	1.4E+16
6	^b 33	1.2E-02	1.14	1.14	0.33	0.38	0.40	1.4E+16

^aVorzeitig abgebrochen.

^b G_{35} nicht positiv definit.

Auch bei anderen Gebieten mit über den Rand holomorph fortsetzbarer Kreisabbildung (etwa Ellipsen) bekommt man ähnliche Resultate. Die theoretischen Erwartungen werden experimentell sehr genau bestätigt. Man könnte die Konvergenzgeschwindigkeit im Experiment durchaus dazu benutzen, die Lage von Polsingularitäten zu ermitteln.

Beispiel 12 Wir betrachten nun das L-förmige Rechteckgebiet $(-1, 3) \times (-1, 3) \setminus (1, 3) \times (1, 3)$, dessen Rand aus sechs linear parametrisierten Strecken besteht. Bei $(1, 1)$ liegt eine Ecke des Außenwinkels $\pi/2$ vor. Weiter ist $\zeta = 0$. Der maximale Fehler sollte also in der Größenordnung $O(n^{-\gamma})$ liegen, mit $\gamma \approx 1/3$. Tatsächlich scheint γ im Versuch (bis $n = 13$) aber etwas über 0.2 zu liegen. $e_n \approx 0.41 \cdot n^{-0.21}$ ergibt die kleinsten Quadrate der Abweichung. Dabei tritt der maximale Fehler ($e_{13} \approx 0.24$) erwartungsgemäß an der inneren Ecke auf. Mit einem Polynom, d.h. einer ganzen Funktion F_n , kann der dortige Winkel natürlich nicht geradegebogen werden (Abb. 12.2).

Beispiel 13 Das herzförmige Kreisbogendreieck (vgl. Abb. 12.3, schattiertes Gebiet rechts) hat zwei gestreckte Winkel und einen Außenwinkel von $\pi/2$. ζ ist der Mittelpunkt des unteren, größeren Kreises. Es ist wieder ein Fehler von $e_n \approx \text{const} \cdot n^{-\gamma}$ zu erwarten, mit $\gamma \approx 1/3$. Der Schätzwert für γ aus den numerischen Versuchen wächst aber zunächst langsam auf Werte von über 0.5 an. Eine (im Sinne der kleinsten Quadrate) gute Approximation des Fehlers liefert $e_n \approx 0.78 \cdot n^{-0.46}$. Das theoretisch vorausgesagte Verhalten tritt wohl erst für größere n zutage. Die Berechnung wurde beim

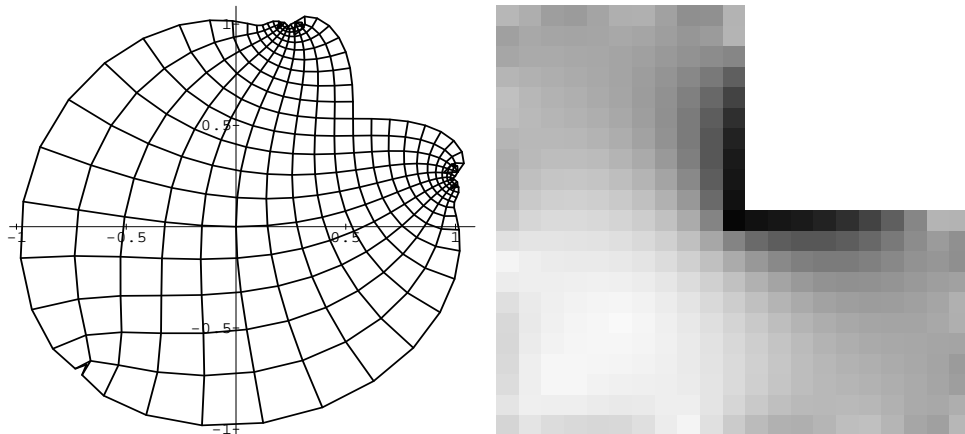


Abbildung 12.2: Konforme Kreisabbildung des L-Gebiets und Fehlerverteilung (gegenüber der besseren Approximation aus dem nächsten Paragraphen).

Polynomgrad 30 abgebrochen. Der maximale Fehler (an der Innenecke) war dann noch 0.1548, die Kondition der Gramschen Matrix $3.88 \cdot 10^7$. Diesmal liefert das reverse Polynom übrigens eine relativ gute Näherung für F^{-1} . Zwar ist die Innenecke „eingebnet“, der Fehler beträgt dort aber nur 0.07 (Abb. 12.3). Während die Ableitung von F an der Innenecke unbeschränkt ist, verschwindet diejenige von F^{-1} dort, F^{-1} ist „regulärer“ als F .

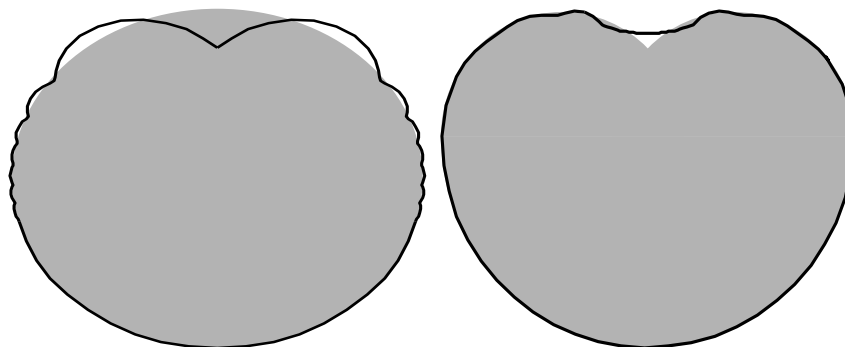


Abbildung 12.3: Kreisbogendreieck: Bild unter F_{30} , Urbild des Kreises unter F_{30}^{-1} .

Beispiel 14 Die Gebiete $(ID + 1)^\alpha$ (Abb. 12.4) mit dem Hauptzweig der Potenz, d.h. Unstetigkeitsstrahl $(-\infty, 0]$, haben bei 0 einen Außenwinkel von $\beta = (2 - \alpha)\pi$ und sind sonst analytisch berandet. Die Sätze 41 und 42 lassen einen Fehler in $O(n^{-\gamma})$ mit $\gamma = \frac{2-\alpha}{\alpha}$ erwarten. Numerische Ergebnisse für diese Gebiete werden in GAIER [Ga3] zitiert. Sie stammen von PAPAMICHAEL & WARBY. Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Beispielen (wo offensichtlich Wechselwirkungen zwischen den Ecken störend wirken) bekommt man diesmal schon für kleine n die theoretisch erwartete Konvergenzgeschwindigkeit, selbst bei denjenigen α , für die die Voraussetzungen der genannten Sätze nicht vollständig erfüllt sind. Mit Annäherung von α an 2, d.h. bei spitzerem Außenwinkel β , bekommt man allerdings zunächst einen höheren Schätzwert $\tilde{\gamma}$, welcher langsam gegen den zu erwartenden Wert konvergiert. Im Grenzfall $\alpha = 2$, $\beta = 0$, (Kardioide) hat man anfangs (Anpassung der ersten 5 e_n an die Fehlerformel) ein $\tilde{\gamma} \approx 0.18$, beim Polynomgrad 25 noch $\tilde{\gamma} \approx 0.13$. Die beste Anpassung für $n = 1, \dots, 30$ liefert $\tilde{\gamma} = 0.15$.

Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse eigener Versuche, die Approximationsordnungen sind relativ niedrig. Es fällt auf, daß das kreisähnlichste Gebiet weder hinsichtlich der Konvergenz, noch der Stabilität am besten abschneidet. Bei der Stabilität dürfte dies daran liegen, daß die „Kreisähn-

lichkeit“ am Entwicklungspunkt der Monome, das ist hier die Ecke 0, gemessen wird und nicht bei $\zeta = 1$.

α	β	$\gamma = \frac{2-\alpha}{\alpha}$	$\tilde{\gamma}$	n	e_n	$\tilde{I}S_n$
2/5	8π/5	4	3.9	^a 17	1.6E-05	1.5E+16
9/10	11π/10	11/9 = 1.̄2	1.2	20	3.1E-03	6.7E+15
7/5	3π/5	3/7 = 0.428...	0.47	20	7.7E-02	2.2E+14
2	0	0	0.15	30	3.4E-01	^b 7.7E+08

^aFehlerabbruch

^bUm -1 verschoben, d.h. $\zeta = 0$.

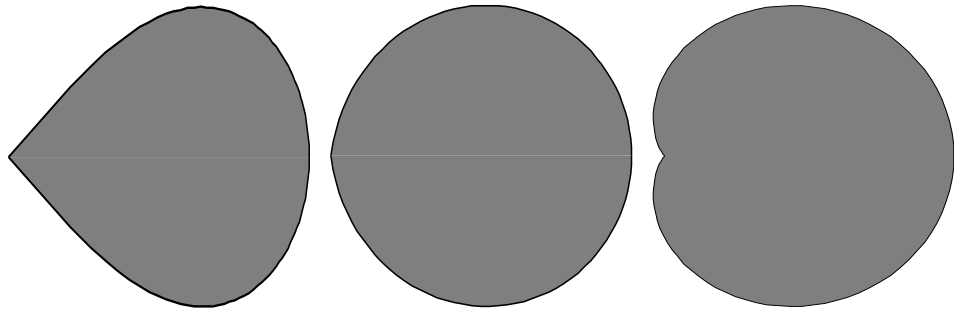
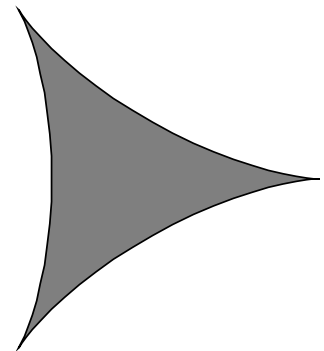


Abbildung 12.4: $(\mathbb{ID} + 1)^\alpha$, $\alpha = 2/5, 9/10$ und $7/5$.

Beispiel 15 Bei der dreibogigen Astroide genügen wegen der Drehinvarianz die Monome $\Psi_j = z^{3j-2}$, $j \in \mathbb{N}$. Versucht man eine Anpassung an die Fehlerformel $e_n \approx c \cdot n^{-\gamma}$, so bekommt man ein γ , welches (bis $n = 40$) auf Werte über 7 anwächst. Der optimale Fehler $1.1 \cdot 10^{-4}$ wird beim Polynomgrad 43 erreicht, die Kondition der normierten Gramschen Matrix beträgt dann schon 10^{16} . Außenspitzen scheinen also vergleichsweise harmlos zu sein.



Kapitel 13

Die Methode von Papamichael et al.

Wir wollen grundsätzlich die Methode der Bergmanschen Kernfunktion mit Polynomapproximation beibehalten. Zusätzlich zu den Monomen $\psi_{j+m} = \eta_j$, $j = 1, 2, \dots$, werden jedoch nun Ansatzfunktionen ψ_j , $j = 1, \dots, m$, benutzt, welche die Entwicklung der Ableitung der konformen Kreisabbildung, d.h. der bei ζ reproduzierenden Funktion K_ζ , an gewissen singulären Punkten widerspiegeln. Es besteht die Hoffnung, daß diese Funktionen vom Algorithmus „angenommen“ werden, d.h. die Näherungen F_n in den Singularitäten mit F gut übereinstimmen. Dies hätte zur Konsequenz, daß

1. im Falle von Polsingularitäten außerhalb des Gebiets die Konstante R in (12.1) vergrößert werden könnte;
2. im Falle von Verzweigungssingularitäten auf dem Rand die bei den reinen Polynomnäherungen auftretenden Ecken geglättet würden.

Im ersten Fall bestärkt die Verallgemeinerung von Satz 29 auf rationale Approximation diese Erwartungen:

Proposition 18 *F sei die konforme Kreisabbildung des Jordangebiets Ω , holomorph auf dem Rand und meromorph innerhalb der äußeren Niveaulinie Γ_R des Randes mit den Hauptteilen (bis auf konstanten Faktor) Ψ_j , $j = 1, \dots, m$, an den Polstellen. R sei in dieser Hinsicht maximal. Seien $\psi_j = \Psi_j$, $j = 1, \dots, m$, $\psi_{m+j} = \eta_j$, $j \in \mathbb{N}$, und F_{n+m} die MBK-Approximation von F mit diesen Ansatzfunktionen. Dann gilt*

$$\max\{|F(z) - F_{n+m}(z)| : z \in \overline{\Omega}\} \in O(r^{-n}) \quad (13.1)$$

für jedes $r < R$ aber kein $r > R$.

Außerdem läßt sich die Lage von Polsingularitäten oft leicht mit dem Spiegelungsprinzip bestimmen. Selbst wenn man die Polstellen nur ungefähr kennt, kann man mit einer Verbesserung rechnen („Polverschiebung“). In der Praxis wird man zwischen der höheren Approximationsgeschwindigkeit durch die Einfügung der rationalen Funktionen und der dadurch oft erheblich beeinträchtigten Stabilität abwägen müssen. Rationale Ansatzfunktionen ψ_j mit Polen weit außerhalb von Ω lassen sich in Ω gut durch Polynome approximieren, denn auch für sie gilt Satz 29. Ihr Approximationsfehler (meßbar durch das zugehörige $I_{n,j}$) hängt eng mit dem Ausmaß der Instabilität bei der Orthonormierung bzw. Gleichungsauflösung zur Berechnung der Koeffizienten \tilde{f}_j zusammen. $I_{n,j}^{-1}$ wächst exponentiell zur Basis R_j , dem niedrigsten Niveau einer Polstelle von ψ_j . In der Tat zeigen die numerischen Versuche, daß sich die Stabilität dann besonders massiv verschlechtert, wenn das größte R_j größer ist als die Zahl δ^{-1} aus (12.6), welche die Instabilität bei reiner Polynomapproximation beschreibt. Sind die R_j der Größe nach geordnet, so sollte $\sigma_m := \min\{R_{m+1}\delta, R_{m+1}/R_m\}$ etwas über die beste erreichbare Genauigkeit bei Berücksichtigung der rationalen Funktionen ψ_j , $j = 1, \dots, m$, aussagen. Die Zahl der gültigen Stellen ist nämlich asymptotisch proportional zum Polynomgrad n , ebenso wie der Logarithmus des Instabilitätsindikators IS_n . Falls das Verfahren stets beim gleichen Wert für IS_n zusammenbrechen würde, so wäre n_{opt} umgekehrt proportional zu δ^{-1} bzw. R_m . In der

Praxis gilt dies sicher nur grob (so spielt etwa auch das Ausmaß der Rundungsfehler bei der numerischen Quadratur eine Rolle, außerdem erreicht man nur niedrige Approximationsordnungen, für die sich die asymptotischen Aussagen noch nicht immer auswirken). Außer beim Quadrat liefert das m mit dem maximalen σ_m aber tatsächlich das beste Ergebnis.

Beispiel 16 Beim Quadrat $(-1, 1) \times (-1, 1)$ hat F einfache Pole bei $Q_{1,2} := \pm 2$ und $Q_{3,4} := \pm 2i$. Das Niveau dieser randnächsten Polstellen ist 1.72, das der zweiten 4 Pole bei ± 6 und $\pm 6i$ ist etwa 5. Die ersten vier Pole lassen sich mit den Ansatzfunktionen $P_k(z) := \frac{1}{z - Q_k}$ ausschalten. Auf einen

Nenner gebracht hat man $\frac{az^3 + bz^2 + cz + d}{z^4 - 16}$; wegen der Drehinvarianz des Quadrats kann man

$a = b = d = 0$ setzen. Die tatsächlich benutzte zusätzliche Ansatzfunktion ist $\Psi_1(z) = \frac{z}{z^4 - 16}$ für F ,

d.h. $\psi_1(z) = \frac{-(3z^4 + 16)}{(z^4 - 16)^2}$ für die Kernfunktion. Man bekommt folgendes Ergebnis (n ist wieder der Polynomgrad, Z_n die Zahl der Funktionsauswertungen):

n	e_n	$\text{Cond } \hat{G}_n$	\tilde{IS}_n^{-1}	Z_n	CPU-Zeit
1	4.910E-04	63.3	16.3	732	1.23
5	4.042E-07	3065.0	765.4	1464	2.45
9	1.156E-08	1.8E+05	4.1E+04	2440	4.26
13	2.390E-11	1.3E+07	2.5E+06	3660	6.74
17	2.427E-13	1.1E+09	1.6E+08	5124	9.86
21	3.713E-13	8.5E+10	1.1E+10	6832	13.72

Wegen der schnell wachsenden Kondition der Gramschen Matrix bleibt die optimale Genauigkeit unter derjenigen der reinen Polynomapproximation. Man beachte aber die bei vergleichbarer Genauigkeit um den Faktor 5–6 geringere Rechenzeit. Daß nur insgesamt sechs Funktionen Ψ_j auszuwerten sind, reduziert auch den Aufwand für die Auswertung der Näherung an einem bestimmten Punkt $z \in \Omega$.

Interessantere Ergebnisse sind bei den flacheren Rechtecken zu erwarten: Im Rechteck $(-2, 2) \times (0.5, 0.5)$ mit Seitenverhältnis 4:1 berücksichtigen wir die Polstellen $\pm i$ (Niveau 1.22). Die Pole bei ± 4 haben das Niveau 2.61, diejenigen bei $\pm 3i$ nur das Niveau 2.36. Wegen der Punktsymmetrie genügt die zusätzliche Ansatzfunktion $\Psi_1(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$. Der kleinste maximale radiale Fehler ist $e_{27} = 3.5 \cdot 10^{-12}$. Die Berücksichtigung weiterer Polsingularitäten beschleunigt zwar die Konvergenz, führt aber andererseits zu einem früheren Abbruch wegen der Instabilität des Verfahrens. Der optimale Fehler ist dann etwas größer, als wenn man nur die Pole vom Niveau 1.22 berücksichtigt.

Beim asymmetrisch gelegenen Rechteck $(-2, 2) \times (-0.75, 1.25)$ mit Seitenverhältnis 2:1 fügen wir rationale Funktionen für die vier randnächsten Polstellen bei $-1.5i$, $2.5i$ und ± 4 (Niveaus 1.30, 1.52 und 2.16) zu den polynomialen Ansatzfunktionen hinzu. Das Ergebnis ist ein maximaler Fehler $e_{19} = 1.2 \cdot 10^{-11}$.

Das Rechteck mit Seitenverhältnis 6:1 hat je zwei Pole auf den Niveaus 1.15, 1.91, 2.82, 2.85, ..., von denen sich die Berücksichtigung der ersten vier Pole als zweckmäßig erwiesen hat. Mit insgesamt 13 Ansatzfunktionen, d.h. Polynomgrad 21, hat man den Fehler $1.94 \cdot 10^{-11}$, die Konvergenzgeschwindigkeit liegt hier etwas unter dem erwarteten Wert.

Wir fassen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen (Seitenverhältnis a , σ_m für empirisch beste Approximation eingerahmt, nächste unberücksichtigte Polstelle hat Niveau R_{m+1} . Schätzwert aus Fehlerabnahme R_0 , zum Vergleich ist auch die Stabilitätszahl IS_n^{-1*} der Polynomapproximation angeben):

a	n_{opt}	$e_{n_{opt}}$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	R_{m+1}	R_0	$IS_{n_{opt}}^{-1}$	$IS_{n_{opt}}^{-1*}$
1	17	2.4E-13	1.2	2.9	–	–	5.06	≈ 4	2E+08	42.3
2	19	1.2E-11	0.7	0.8	1.2	1.4	2.96	3.06	6E+11	5E+05
4	27	3.5E-12	0.6	1.1	1.1	1.1	2.36	2.38	6E+11	2E+11
6	21	1.9E-11	0.5	0.8	1.1	1.0	2.82	2.65	2E+12	5E+09

Komplizierter verhält es sich im zweiten Fall. Die Entwicklung der konformen Kreisabbildung an einer Verzweigungsstelle $z_0 \in \partial\Omega$ nach Satz 35 (Lehman) enthält unendlich viele Funktionen der Art $(z - z_0)^{k+1/\alpha}$, evtl. auch noch logarithmische Anteile. Diese Singularitäten wird man im allgemeinen nicht ganz beseitigen können. Damit bleibt eine Fehlerordnung in $O(p^n)$, $p < 1$, unerreichbar. Immerhin sollten die Anfangsnäherung und die Approximationsgeschwindigkeit (etwa größere Konstante γ in (12.2) oder Verhalten wie bei glatteren Rändern nach Satz 43) zu verbessern sein. Die Hinzufügung von Verzweigungssingularitäten ändert an der Stabilität des Verfahrens gewöhnlich wenig, da jene hinreichend „linear unabhängig“ von den Polynomen sind. Wegen der langsamen Konvergenz kommt es ohnehin weniger auf die Erreichbarkeit hoher Approximationsordnungen an, als auf eine brauchbare Näherung bei erträglichem Aufwand und bescheidenen Genauigkeitsanforderungen.

Man beachte weiter, daß die Ableitungen der Zusatzfunktionen in der Nähe der Ecken schlimmstenfalls wie $|z - z_0|^{-1/2}$ wachsen, die Greensche Formel also anwendbar bleibt. Bei der Wahl des Quadraturverfahrens ist etwas Vorsicht geboten. Die Gaußquadratur beispielsweise toleriert Singularitäten an den Enden des Integrationsintervalls. Durch Umparametrisieren der Randkurve kann man aber auch erreichen, daß der Integrand beschränkt bleibt (vgl. [PW]). Weiterhin sind geeignete Zweige der nichtganzen Potenzfunktionen und des Logarithmus zu wählen, welche in Ω keine Unstetigkeitsstellen besitzen.

Beispiel 17 Das L-förmige Rechteckgebiet hat bei $z_0 = 1 + i$ den Innenwinkel $\frac{3\pi}{2}$, also $\alpha = 3/2$. Wir benutzen für F die Zusatzfunktionen $(z - 1 - i)^{2k/3}$ mit $k = 1, 2, 4, 5$. Weiterhin haben sich die rationalen Funktionen für die randnächsten Polstellen bei -2 und $-2i$ als nützlich erwiesen. Bereits mit dem Polynomgrad 6 bekommt man einen Fehler von nur $1.14 \cdot 10^{-4}$. Anschließend nimmt die Konvergenzgeschwindigkeit merklich ab. Es treten immer mehr Schritte auf, die keine Verbesserung oder gar eine leichte Verschlechterung des maximalen radialen Fehlers bewirken. Beim Polynomgrad 11 ist der Fehler $4.8 \cdot 10^{-5}$, beim Grad 25 noch $4.1 \cdot 10^{-5}$. Der Mehraufwand (41 Sekunden CPU-Zeit bei Grad 11, $8\frac{1}{2}$ Minuten bei Grad 25) lohnt sich also sicherlich nicht. Man beachte die Verbesserung in Abbildung 13.1 gegenüber Abb. 12.2. Die Umkehrabbildung wurde mit dem Newtonverfahren berechnet.

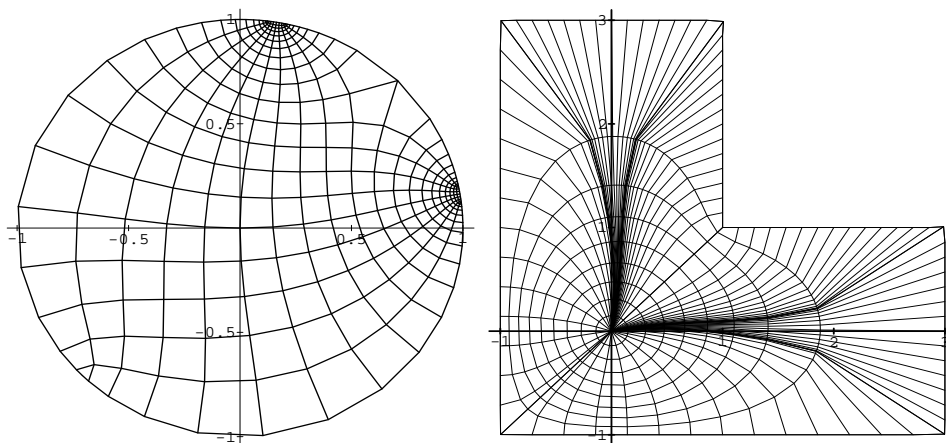


Abbildung 13.1: Kreisabbildung des L-Gebiets (Bild eines kartesischen Gitters) und ihre Umkehrung (Bild eines polaren Gitters).

Beispiel 18 Beim Kreisbogendreieck benutzen wir zunächst nur die Funktion $\Psi_1(z) = (z - z_0)^{2/3}$, wobei z_0 die Ecke mit dem Außenwinkel von $\pi/2$ ist. Beim Polynomgrad 17 hat man den Fehler $1.8 \cdot 10^{-3}$, danach bekommt man mehrere Schritte hintereinander keine Verbesserung mehr. Mit der zusätzlichen Funktion $\Psi_2(z) = (z - z_0)^{4/3}$ hat man zwar eine bessere Anfangsnäherung und eine gleichmäßige Fehlerabnahme auch bei höheren Polynomgraden, bis zum Grad 17 verkleinert sich der Fehler aber langsamer als ohne Ψ_2 . Die Benutzung logarithmischer Terme zu den beiden π -Ecken bewirkt ebenfalls keine überzeugende Verbesserung. Die zu diesen Funktionen gehörenden

Koeffizienten \tilde{f}_j sind relativ klein. Dagegen erwiesen sich Versuche mit logarithmischen Termen zur Ecke z_0 als überraschend erfolgreich. Auch die in der Entwicklung (10.5) gar nicht vorkommenden Funktionen $(z - z_0)^{2/3} \log(z - z_0)$ und $(z - z_0)^{3+2/3} \log^2(z - z_0)$ waren der Genauigkeit förderlich. Nach einigen Versuchen stellte sich die beste Näherung mit den zusätzlichen Funktionen

$$w^{2/3}, w^{4/3}, w^{3+2/3} \log w, w^{2/3} \log w, w^{3+2/3} \log^2 w; \quad w = (z - z_0)$$

ein. Beim Polynomgrad 24 war $e_n = 1.19 \cdot 10^{-5}$, die Konditionszahl $5 \cdot 10^{11}$ und die Rechenzeit $5\frac{1}{2}$ Minuten. Die beste Anpassung an eine Fehlerformel $e_n \approx c \cdot n^\gamma$ liefert ein γ von etwa 3.3, c scheint in der Größenordnung von 1 zu liegen.

Man könnte die nach innen weisende Ecke auch dadurch begradigen, daß man die Abbildung $z \mapsto (z - z_0)^{2/3}$ vorschaltet. Das Bildgebiet Ω^* ist dann C^1 -berandet. Allerdings wird die Auswertung der Randparametrisierung und ihrer Tangentialableitung recht aufwendig. Die numerische Quadratur verliert deutlich an Genauigkeit bzw. fordert zusätzlichen Rechenaufwand durch Teilung des Integrationsintervalls und Extrapolation. Beim Polynomgrad 12 (ohne Zusatzfunktionen) hat man den maximalen Fehler $8.4 \cdot 10^{-4}$, gegenüber $1.36 \cdot 10^{-4}$ beim Originalgebiet mit den obigen Zusatzfunktionen und demselben Polynomgrad.

Bei den Gebieten $(ID + 1)^\alpha$ aus Beispiel 14 bekommt man die exakte Kreisabbildung (bis auf Rundungsfehler von Maschinengenauigkeit in den Koeffizienten), wenn man dem Algorithmus die Zusatzfunktion $\Psi(z) = z^{1/\alpha}$ anbietet.

Weitere numerische Ergebnisse findet man bei PAPAMICHAEL & WARBY [PW]. Zum Vergleich eignen sich die dort angegebenen Werte der mittleren Genauigkeit (COMP2), die Schätzungen für die Parameter R und γ der betreffenden Fehlerformel wurden anders gewonnen, stimmen aber (nach Umrechnung auf $n = \text{Polynomgrad}$) mit den oben angegebenen gut überein. Die symbolische Variante (nach [JaTa]) liefert qualitativ ähnliche Ergebnisse. Da die Instabilität aber keine Rolle mehr spielt, lassen sich bei Gebieten mit über den Rand holomorph fortsetzbarer Kreisabbildung nahezu beliebige Genauigkeiten erzielen. Den für einen vorgegebenen Fehler erforderlichen Polynomgrad kann man leicht berechnen, wenn man das Niveau der randnächsten Singularitäten kennt. Der Rechenaufwand ist aber unverhältnismäßig höher (mit MATHEMATICA über eine Stunde für 15 Ansatzfunktionen). Bei allgemeineren Gebieten scheinen sich kaum Vorteile zu ergeben. Zum einen gibt es praktische Schwierigkeiten (symbolische Integration der Zusatzfunktionen), zum anderen läßt sich das Hauptproblem, die extrem langsame Konvergenz, ohnehin nicht umgehen.

Kapitel 14

Zusatz: Die Methode der Orthogonalentwicklung

Wir wollen noch eine weitere Methode der Konstruktion einer Approximation für die konforme Kreisabbildung betrachten. Diese gründet zwar nicht auf einer Kernfunktion, weist aber doch eine gewisse Ähnlichkeit mit der MBK auf. Insbesondere läßt sich das Programm mit nur geringen Änderungen übernehmen.

Bei der MBK haben wir eine Funktion (nämlich die Kernfunktion $k_B(\zeta, \cdot)$) in der Norm (des L_B^2) approximiert und hieraus die näherungsweise Kreisabbildung F_n konstruiert. Die Fourierkoeffizienten waren trivialerweise die Funktionswerte der Orthonormalfunktionen φ_j am Normierungspunkt ζ . Diese Idee sollte sich auf andere Hilfsfunktionen h verallgemeinern lassen. Voraussetzungen sind:

1. Aus einer Näherung von h läßt sich eine ebensolche für F rekonstruieren,
2. die Koeffizienten $\langle h, \varphi_j \rangle$ der Fourierreihe kann man mit den vorhandenen Kenntnissen von der Kreisabbildung berechnen.

Im allgemeinen muß man die Skalarprodukte zwischen h und den Orthonormalfunktionen natürlich durch Integration bestimmen. Falls Ω und h genügend regulär sind, gilt wieder die Greensche Formel und man kann das Gebietsintegral in ein Randintegral umwandeln. Alternativ könnte man auch im Raum L_ζ^2 arbeiten, der von vorneherein ein Randintegral als Norm besitzt. Auf dem Rand kennen wir *a priori* den Betrag der Kreisabbildung, also den Realteil von $\log F$, womit diese Funktion bereits im wesentlichen festgelegt wäre. Allerdings hat F bei ζ eine einfache Nullstelle. Damit der Logarithmus existiert nimmt man die Hilfsfunktion

$$H(z) := \log \left(\frac{F(z)}{g(z)} \right) = \log(F(z)) - \log(g(z)) \quad (14.1)$$

nimmt. Dabei soll $g(z)$ eine in Ω holomorphe Funktion mit genau einer einfachen Nullstelle bei ζ sein. Im einfachsten Fall ist $g(z) = z - \zeta$. Etwaige Polsingularitäten von F lassen sich bei dieser Gelegenheit gleich mit abdividieren, falls ihre Lage bekannt ist. $\operatorname{Re} H(z) + \log |g(z)| = \log |F(z)|$ ist übrigens gerade die Greensche Funktion $G(\zeta, \cdot)$ von Ω . Die Methode läuft also auf die Konstruktion der Greenschen Funktion des Gebiets hinaus, man hat ein Randwertproblem für die harmonische Funktion $\operatorname{Re} H(z)$ zu lösen. Anstelle von H kann man auch die Ableitung verwenden:

$$h(z) := H'(z) = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}. \quad (14.2)$$

Dann kommt es nicht mehr auf den genauen Wert des Bildkreisradius an, F muß nur noch konstanten Betrag R auf dem Rand besitzen. Falls $h_n = \sum_{j=1}^n f_j \varphi_j = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j \Psi_j$ (φ, ψ, Ψ wie in Kapitel 11) der Anfang der Orthonormalentwicklung von h ist, bekommt man mit $H_n = \tilde{c} + \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j \Psi_j$ eine Näherung für H und mit $F_n(z) = c \cdot g(z) \cdot \exp(H_n(z))$ eine ebensolche für F . Die Konstante $c \in \mathbb{C}$

ergibt sich aus einer (neben $F_n(\zeta) = 0$) zweiten Normierungsbedingung, z.B. $F_n(\zeta_0) = 1$, $\zeta_0 \in \partial\Omega$. Dann ist $1/c = g(\zeta_0) \exp(H_n(\zeta_0))$.

Es bleibt nur noch das Problem, die Skalarprodukte

$$\langle h, \varphi_j \rangle = \int_{\Omega} h(w) \overline{\varphi_j(w)} dw$$

zu berechnen. Wir wollen wieder die Greensche Formel anwenden (Randunstetigkeiten von h , d.h. von F' sind nach Satz 35 hinreichend harmlos, dies soll auch für die φ_j gelten). Danach ist $\langle \varphi_j, h \rangle = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \varphi_j(w) \overline{H(w)} dw = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \varphi_j(w) \overline{H(w)} dw + \underbrace{\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \varphi_j(w) H(w) dw}_{=0, \text{ da Integrand holomorph}} = -i \int_{\Gamma} \varphi_j(w) \operatorname{Re} H(w) dw$.

Weiterhin gilt $\operatorname{Re} H(z) = \log \left| \frac{F(z)}{g(z)} \right| = \log(R) - \log |g(z)|$. Da $\int_{\Gamma} \varphi_j(w) \log(R) dw$ stets verschwindet, folgt unabhängig vom Radius R des Bildkreises:

$$\langle \varphi_j, h \rangle = i \int_{\Gamma} \varphi_j(w) \log |g(w)| dw. \quad (14.3)$$

Diese Integrale lassen sich aus den entsprechenden Integralen mit den Ansatzfunktionen ψ_j errechnen. Letztere bekommt man programmtechnisch recht einfach zusammen mit der Gramschen Matrix $G_n = (g_{jk})$ der Produkte $g_{jk} = \langle \psi_j, \psi_k \rangle$, man muß nur eine weitere Spalte $g_{j0} = \langle \psi_j, \log |g(\cdot)| \rangle$ anfügen. Die weiteren Änderungen im MBK-Programm kann man dem Anhang entnehmen. Auch die theoretischen Aussagen über Stabilität und Konvergenzgeschwindigkeit bei Polynomapproximation gelten weiter, betreffen aber nun die Konvergenz von H_n gegen H , die F_n sind keine Polynome mehr. Zur Verbesserung der Approximation kann man wieder Singularitätenfunktionen zu den Momenten hinzufügen.

Beispiel 19 Im Quadrat $(-1, 1) \times (-1, 1)$ dividieren wir die 4 randnächsten Singularitäten ab, indem wir $g(z) = \frac{z}{z^4 - 16}$ setzen. Die Konvergenz ist zwar langsamer als man es bei der MBK mit g als zusätzlicher Ansatzfunktion erwarten würde, dafür hat man aber eine gute Anfangsnäherung und die Stabilität bleibt viel länger erhalten. Mit dem Polynomgrad 32 bekommt man den optimalen Fehler $8.6 \cdot 10^{-15}$, was mit der verwendeten Maschinengenauigkeit (ca. 16 Stellen) kaum zu verbessern sein dürfte. Auch bei den flacheren Rechtecken ist die Konvergenz langsamer als bei der MBK. Da die Stabilität schon für die reine Polynomnäherung schlechter ist und durch Einbeziehung randnaher Polsingularitäten kaum zusätzlich leidet, erweist sich hier die MBK als günstiger.

Interessant wird diese Methode vor allem dadurch, daß man sie auf mehrfach zusammenhängende Gebiete anwenden kann. Sei Ω ein m -fach zusammenhängendes Jordangebiet mit stückweise analytischen Rändern Γ_j und F die konforme Abbildung auf einen Kreisring um 0 mit Schlitzen (Satz 38).

Es sei $F(\zeta_0) = 1$ für einen Randpunkt $\zeta_0 \in \partial\Omega$. Wir setzen wieder $H(z) := \log \left(\frac{F(z)}{g(z)} \right)$. Dabei soll g

holomorph innerhalb von Γ_m sein. Der Logarithmus existiert, wenn die Ableitung $h(z) = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}$ eine Stammfunktion hat, d.h. die Integrale über alle geschlossenen Kurven $\gamma \subset \Omega$ verschwinden: $\int_{\gamma} \left(\frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz = \int_{F(\gamma)} \frac{1}{w} dw - \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \stackrel{!}{=} 0$. Dies ist erfüllt, wenn g innerhalb von Γ_1 , dem Urbild des inneren Randkreises im Ring, eine einfache Nullstelle hat und sonst innerhalb von Γ_m nirgends verschwindet (Residuensatz).

Mit Hilfe der Greenschen Formel bekommt man für die Fourierkoeffizienten eine Summe von Integralen über die m geschlossenen Randkurven Γ_j . Da auf jeder dieser Randkomponenten $\log |F(z)|$ konstant ist, es aber auf den Wert dieser Konstanten nicht ankommt (hier erweist es sich als wesentlich, daß wir mit der Ableitung h von H arbeiten), erhält man wie oben

$$\langle \varphi_j, h \rangle = \sum_{k=0}^m i \int_{\Gamma_k} \varphi_j(w) \log |g(w)| dw = i \int_{\Gamma} \varphi_j(w) \log |g(w)| dw. \quad (14.4)$$

Als Ansatzfunktionen genügen die Monome jetzt allerdings nicht mehr. Für jeden inneren Rand wähle man einen Punkt $a_k \in \text{Int}\Gamma_k$ aus. Dann approximieren die Monome zusammen mit den Funktionen

$$\eta_{jk}(z) := \frac{1}{(z - a_k)^j}, \quad j = 2, 3, \dots \quad (14.5)$$

jede in Ω holomorphe Funktion mit eindeutiger Stammfunktion auf Kompakta gleichmäßig (RUNGESCHER Approximationssatz). Da Ω beschränkt ist und h am Rand nur hinreichend „harmlose“ Singularitäten hat, läßt sich h in der Norm durch diese Funktionen approximieren.

Die Norm der Hilfsfunktion h hängt mit den Radien R_1, R_m der Bildkreise zusammen:

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \int_{\Omega} \left| \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 dz \\ &= -i \int_{\Gamma} \frac{F'(z)}{F(z)} \log |F(z)| dz + 2 \text{Re} \left(i \int_{\Gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} \log |F(z)| dz \right) - \\ &\quad i \int_{\Gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} \log |g(z)| dz. \end{aligned}$$

Der erste Summand transformiert sich zu $-i \int_{F(\Gamma)} \frac{1}{w} \log |w| dw = 2\pi(\log(R_m) - \log(R_1))$. Ebenso ist der zweite Summand $-4\pi(\log(R_m) - \log(R_1))$, da g nur innerhalb von Γ_1 (und damit Γ_m) eine einfache Nullstelle hat. Dies folgt jeweils aus dem Residuensatz und aus $|w| = |F(z)| \equiv R_j$ auf den Randkomponenten. Zusammen ergibt sich

$$\log \left(\frac{R_m}{R_1} \right) = \frac{-1}{2\pi} \left(i \int_{\Gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} \log |g(z)| dz + \|h\|^2 \right). \quad (14.6)$$

Für $m = 2$ ist dies der Logarithmus des Moduls $M := \frac{R_2}{R_1}$. Für größeres m erhält man die weiteren Moduln durch Wahl eines anderen Urbilds Γ_j des inneren Randkreises. Natürlich kann man die Moduln auch „experimentell“ durch Auswertung der Approximation F_n an einigen Testpunkten auf den Randkurven gewinnen. Das in (14.6) auftretende Integral läßt sich zusammen mit der Gramschen Matrix berechnen (als Eintrag $g_{00} = \langle \frac{g'(\cdot)}{g(\cdot)}, \log |g(\cdot)| \rangle$), $\|h\|^2$ kann man durch $\|h_n\|^2$, d.h. die Quadratsumme der ermittelten Fourierkoeffizienten ersetzen.

Beispiel 20 Das Gebiet aus Abb. 14.1, links. Beim Polynomgrad 52 (über 15 Minuten CPU-Zeit, danach wurde die Rechnung abgebrochen) beträgt der maximale radiale Fehler $2.35 \cdot 10^{-13}$. Der Modul 2.1572261669374 aus Formel (14.6) stimmt mit dem Wert aus dem Test exakt überein. Während der Test aber erst im letzten Schritt diese Zahl liefert, bleibt der Wert nach (14.6) schon ab dem Polynomgrad 28 stabil.

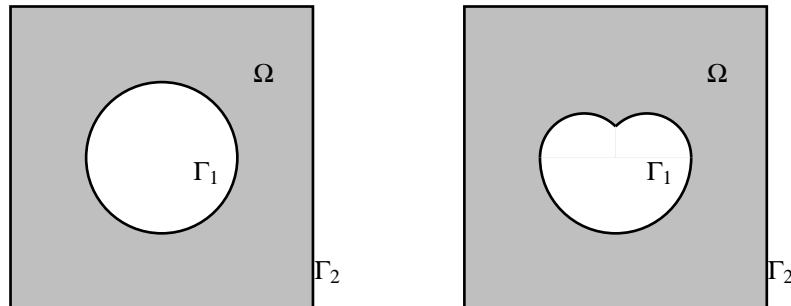


Abbildung 14.1: Quadrat mit verschiedenen Löchern.

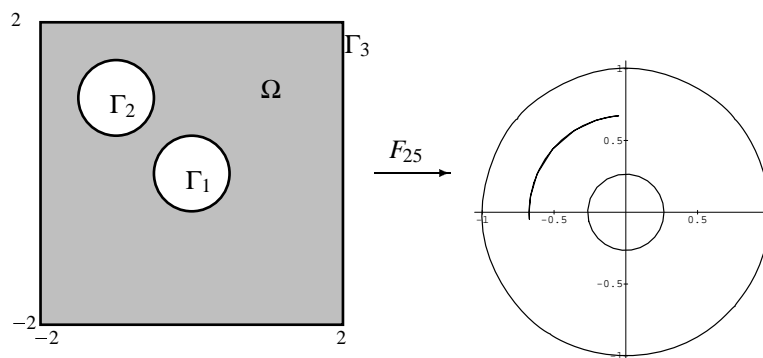


Abbildung 14.2: Quadrat mit zwei kreisförmigen Löchern

Beispiel 21 Das Gebiet aus Abb. 14.1, rechts. Beim optimalen Polynomgrad 23 bekommt man einen maximalen Fehler von $4.57 \cdot 10^{-4}$. Dies ist deutlich besser als bei den Polynomapproximationen für die Kreisabbildung des Herzgebiets, was wohl daran liegt, daß das Gebiet nun auf der konvexen Seite der Ecke liegt. Der nach (14.6) berechnete Modul beträgt $2.34196\dots$, aus dem Test der Näherung ergibt sich der Wert $2.34194\dots$, (14.6) liefert auch hier früher einen stabilen Wert.

Beispiel 22 Dreifach zusammenhängendes Gebiet aus Abb. 14.2, links. Hier bekommt man als Bildgebiet einen Kreisring mit einem Schlitz. Die Rechnung wurde nur mit 25 Ansatzfunktionen durchgeführt (Rechenzeit knapp 400 Sekunden). Da neben den Monomen noch die Funktionen z^{-j} und $(z+1-i)^{-j}$, $j = 2, 3, \dots$, als Ansatzfunktionen nötig sind, bedeutet dies nur jeweils den Grad 9. Der maximale Fehler (auf dem äußeren Rand) ist $2.14 \cdot 10^{-3}$. Es wird ein Modul $R_3/R_1 \approx 3.763$ (vier stabile Stellen) errechnet, welcher auf drei Stellen mit den Testergebnissen übereinstimmt.

Literatur: ELLACOTT [EI], PAPAMICHAEL & WARBY [PW] und KOKKINOS, PAPAMICHAEL & SIDERIDIS [KPS].

Kapitel 15

Anwendung: Numerische Lösung elliptischer Randwertaufgaben bei krummlinig berandeten Gebieten

Problemstellung: Sei Ω ein beschränktes, einfach zusammenhängendes und stückweise analytisch berandetes Gebiet im $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Gesucht sei eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ der elliptischen Differentialgleichung

$$a \Delta u + \nabla u \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + du = p \text{ in } \Omega \quad (15.1)$$

($\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $\nabla u = (u_x \ u_y)$) mit genügend „regulären“ Koeffizientenfunktionen a, b, c, d, p . Die Lösung soll der Randbedingung

$$gu + h \frac{\partial u}{\partial n} = q \text{ auf } \partial\Omega \quad (n: \text{äußere Normale}) \quad (15.2)$$

genügen. Diese Randwertaufgabe wird als eindeutig lösbar vorausgesetzt, g darf also nicht überall verschwinden.

Wir nehmen ferner an, wir hätten ein numerisches Lösungsverfahren für Probleme dieser Art, wenn das Gebiet ein Rechteck $\tilde{\Omega}$ ist. Hier wird speziell ein Mehrgitterverfahren angewandt. Das Gitter besteht aus den Punkten $w_{nm} = \frac{n}{N}A + i\frac{m}{M}B$, $n = 0, \dots, N$, $m = 0, \dots, M$, des Rechtecks $\tilde{\Omega} = (0, A) \times (0, B)$. In den Gitterpunkten müssen die Koeffizientenfunktionen $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{p}$, bzw. $\tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{q}$ bereitgestellt werden. Die Diskretisation erfolgt mit der NAG-Subroutine D03EEF (7-Punkte-Molekül, genauere Beschreibung in [NAG]), die Auflösung des erzeugten linearen Gleichungssystems (Matrix hat Bandbreite 7) mit D03EDF. M und N sollten möglichst hohe Zweierpotenzen enthalten, um mehrere Gitterniveaus zu ermöglichen.

Die Idee (vgl. PAPAMICHAEL & SIDERIDIS [PS]) ist nun, das gegebene Problem auf Ω mit Hilfe einer konformen Abbildung $F : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$, $z = x + iy \mapsto w = \xi + i\eta$, in ein äquivalentes Problem auf dem Rechteck zu transformieren, letzteres numerisch (oder sogar exakt) zu lösen und hieraus eine (Näherungs-)Lösung des ursprünglichen Problems zu rekonstruieren.

Wir setzen $f := F^{-1}$, $v := u \circ f$, d.h. $u(z) = v(w) = v(F(z))$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \Delta u &= \frac{1}{4} \Delta (v \circ F) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (v \circ F) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial w} \circ F \right) \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}}_{=0} + \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{w}} \circ F \right) \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{w}} \circ F \right) \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{w}} \circ F \right) \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial z \partial \bar{z}}}_{=0} \\
&= \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial w \partial \bar{w}} \circ F \right) \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{w}^2} \underbrace{\frac{\partial \bar{F}}{\partial z}}_{=0} \right] \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} \\
&= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial w \partial \bar{w}} \circ F \right) \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|^2 \\
&= \frac{1}{4} (\Delta v \circ F) |F'|^2.
\end{aligned}$$

Ebenso gilt $\nabla u = \nabla v \cdot DF = \nabla v \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$. Hierbei ist $\xi_x = \eta_y = \operatorname{Re} F'$ und $\eta_x = -\xi_y = \operatorname{Im} F'$. Die Differentialgleichung transformiert sich also zu

$$\tilde{a} \Delta v + \nabla v \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{c} \end{pmatrix} + \tilde{d} v = \tilde{p}, \quad (15.3)$$

mit $\tilde{a} = (a \circ f) |F' \circ f|^2 = (a \circ f) |f'|^{-2}$, $(\tilde{b} \tilde{c})^T = (DF \circ f)(b \circ f \ c \circ f)^T$, $\tilde{d} = d \circ f$ und $\tilde{p} = p \circ f$. Der Normalenvektor n an $\partial\Omega$ wird in einen Vektor in Normalenrichtung \tilde{n} an $\partial\tilde{\Omega}$ abgebildet: $DF \cdot n = F' \cdot (n_1 + i n_2) = \tilde{n} |F'|$. Die Randbedingung transformiert sich also wie folgt:

$$\tilde{g} v + \tilde{h} \frac{\partial v}{\partial \tilde{n}} = \tilde{q}, \quad (15.4)$$

mit $\tilde{g} = g \circ f$, $\tilde{h} = (h \circ f) |f'|^{-1}$ und $\tilde{q} = q \circ f$. Dabei sind F und f stückweise über den Rand hinaus konform fortsetzbar.

Damit haben wir die Transformation der Randwertaufgabe vollständig auf die konforme Abbildung von Ω auf das Rechteck $\tilde{\Omega}$ zurückgeführt. Die oben ausschließlich auftretende Abbildung $f: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ wird zusammengesetzt aus der konformen Abbildung F_1 des Rechtecks auf den Einheitskreis und der Umkehrung der Kreisabbildung F_2 des Originalgebiets. Die ebenfalls benötigte Ableitung $F' \circ f = 1/f' = \frac{F_2' \circ f}{F_1'}$ bereitet keine zusätzlichen Schwierigkeiten, da die MBK auch für F_k' Näherungen liefert.

Die gesuchte Lösung u kann man nun dadurch näherungsweise an beliebigen Punkten $z \in \Omega$ bestimmen, daß man mittels Interpolation im Rechteckgitter $\{w_{nm}\}$ eine Näherung für v bei $w = F(z)$ berechnet. Dazu wird jetzt die Abbildung $F = F_1^{-1} \circ F_2$ benötigt, man muß also diesmal die Kreisabbildung des Rechtecks umkehren. Neben dem Newtonverfahren mit der MBK kommt auch die direkte Berechnung mit der SCHWARZ-CHRISTOFFELschen Formel infrage. Das elliptische Integral kann in eine Potenzreihe genügend hoher Ordnung entwickelt werden, die zumindest im Inneren des Kreises (Rand wird nicht benötigt) bei geringem Aufwand eine befriedigende Näherung liefert.

Es ist noch zu beachten, daß die Abbildung F an einigen Randpunkten nicht mehr konform zu sein braucht, was zu entsprechenden Singularitäten bei den Koeffizientenfunktionen und der Lösung des transformierten Problems führen kann (beim Originalproblem ist Regularität vorausgesetzt). Deren Behandlung wird in [PS, 4.] näher untersucht. Kritisch sind besonders Ecken, an denen F eine Vergrößerung des Winkels bewirkt (etwa ein Innenwinkel $< \pi$ auf $\partial\Omega$, der zu π geradegebogen wird). Dann ist nämlich f' unbeschränkt und F' verschwindet (vgl. Satz 35). Oftmals läßt sich diese Komplikation dadurch vermeiden, daß man die betreffenden Ecken von Ω in die Ecken des Rechtecks abbildet. Ähnliches gilt für einen Wechsel im Typ der Randbedingung (Dirichletsch bzw. Neumannsch), also Unstetigkeiten in den Koeffizienten der Randbedingung.

Bei einem festen Rechteck $\tilde{\Omega}$ dürfen wir nur die Bilder dreier Randpunkte vorschreiben. Man kann jedoch als weiteren freien Parameter das Seitenverhältnis A/B im Rechteck variieren. Damit lassen sich die Bilder $w_k \in \partial\tilde{\Omega}$ von vier Randpunkten $z_k \in \partial\Omega$, $k = 1, \dots, 4$, frei vorgeben: Seien z_k' die Bilder der z_k unter F_2 auf dem Einheitskreis (jeweils im positiven Umlaufsinn numeriert). Dann

transformiert $z' \mapsto \zeta = i \frac{z_2(z' - z_1)}{z_1(z' - z_2)}$ den Einheitskreis so auf die obere Halbebene \mathbb{H} , daß $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = \infty$ und $\zeta_3, \zeta_4 < 0$ die Bilder der z'_k sind. Mit $\alpha = \sqrt{\zeta_3 \zeta_4}$ ist $\zeta \mapsto \zeta' = \frac{\zeta - \alpha}{\zeta + \alpha}$ ein Automorphismus der oberen Halbebene mit $\zeta'_1 = -1$, $\zeta'_2 = 1$ und $\zeta'_3 = \frac{\zeta_3 - \sqrt{\zeta_3 \zeta_4}}{\zeta_3 + \sqrt{\zeta_3 \zeta_4}} = \frac{\sqrt{\zeta_3 \zeta_4} - \zeta_4}{\sqrt{\zeta_3 \zeta_4} + \zeta_4} = -\zeta'_4$, also $|\zeta'_3| = |\zeta'_4| = \rho >$

0. Nun gibt es aber eine konforme Abbildung $\zeta' \mapsto w$ von \mathbb{H} auf ein Rechteck $\tilde{\Omega}$ mit Seitenverhältnis $\frac{A}{B} = 2 \frac{K(\rho^{-1})}{K(\sqrt{1 - \rho^{-2}})}$, welches als Ecken die Bilder w_k der ζ'_k hat (etwa BEHNKE-SOMMER [BS,

S. 381]). Die reelle Zahl $K(\tau) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \tau^2 \sin^2 \varphi}}$ ist ein vollständiges elliptisches Integral 1.

Gattung, welches man leicht numerisch (durch eine Rekursionsformel) berechnen oder einer Tabelle entnehmen kann. Neben der Bestimmung von A/B wird dann freilich auch die Neukonstruktion der zugehörigen konformen Kreisabbildung F_1 erforderlich.

Insgesamt bietet sich folgendes Vorgehen an:

Algorithmus 2

Gegeben : Das Gebiet Ω (wie für MBK), die Koeffizientenfunktionen a, b, c, d, p der elliptischen Differentialgleichung, sowie diejenigen der Randbedingung: g, h, q .

MBK : Konstruktion der konformen Kreisabbildungen von Ω . Zur Realisierung der gewünschten Ränderzuordnung nötigenfalls: Bestimmung des Seitenverhältnisses in $\tilde{\Omega}$ und Konstruktion der konformen Kreisabbildung von $\tilde{\Omega}$, sowie Zwischenschaltung eines geeigneten Automorphismus des Einheitskreises (bzw. Wahl des Normierungspunktes $\zeta \in \tilde{\Omega}$).

GITTERTRANSFORMATION : $\{w_{nm}\}$ im Rechteck nach $\{z_{nm}\}$ in Ω . Neben dem Punkt z_{nm} wird auch $D_{nm} = F'(z_{nm})$ gespeichert.

DISKRETISATION : Aus dem transformierten Problem wird ein lineares Gleichungssystem $A\underline{v} = \underline{r}$ zur Berechnung der Werte $\underline{v} = (v_{nm})$ einer Näherung der Lösung bei $w_{nm} = (\xi_n, \eta_m)$ erzeugt.

AUFLÖSUNG des Gleichungssystems nach \underline{v} (Iterationsverfahren).

RÜCKTRANSFORMATION auf das ursprüngliche Problem, etwa Bestimmung der Näherung an beliebigen Punkten in Ω durch Interpolation in $\tilde{\Omega}$.

Da die Gittertransformation in einem getrennten Schritt erfolgt und außer hinsichtlich der Feinheit des Gitters und der Ränderzuordnung von der eigentlichen Randwertaufgabe unabhängig ist, kann das transformierte Gitter (d.h. die Daten z_{nm} und D_{nm}) für verschiedene Differentialgleichungen und Randwerte verwendet werden, ohne daß eine Neuberechnung nötig wäre. Die konforme Kreisabbildung F_2 des Gebiets Ω hängt sogar nur von diesem ab, das Problem der Ränderzuordnung kann auf die leichter zu konstruierende Kreisabbildung des Rechtecks verlagert werden.

Beispiel 23 Ω ist das bereits vorgestellte herzförmige Kreisbogendreieck, $\tilde{\Omega}$ das Quadrat. Wir verwenden die besten Kreisabbildungen mit MBK aus Kapitel 13. Da in Ω kein Innenwinkel $< \pi$ auftritt, kann man auf eine spezielle Ränderzuordnung verzichten. Wir wollen die Funktion $u(z) = |z|^2$ aus ihren (Dirichlet-)Randwerten rekonstruieren. Die Differentialgleichung lautet $\Delta u = 4$. Es werden 97×97 Gitterpunkte verwendet. Die Gittertransformation benötigt etwa 16 Minuten CPU-Zeit, Diskretisation und Auflösung des Gleichungssystems dagegen nur 11 Sekunden. Der Vergleich fällt natürlich auch deswegen so extrem aus, weil die Auswertung der (hier trivialen) Koeffizienten von Differentialgleichung und Randbedingung gegenüber der Berechnung der konformen Abbildung (insbesondere der Umkehrung von F_2) kaum ins Gewicht fällt. Die Rechenzeit wächst deutlich an, wenn man die Startwerte für das Newtonverfahren nicht mit dem reversen Polynom berechnet, sondern in einer Tabelle sucht (wie in [PS] vorgeschlagen und bei anderen Gebieten auch notwendig). Für die Auflösung des Gleichungssystems $A\underline{v} = \underline{r}$ sind 14 Iterationen nötig, dann verursacht die gefundene Lösung \underline{v} ein Residuum von $2.7 \cdot 10^{-11}$ (Zielgenauigkeit 10^{-10}). Die Näherungen v_{nm} an den Gitterpunkten w_{nm} werden mit den exakten Werten $u(z_{nm})$ verglichen. Der maximale auftretende Fehler liegt bei $2.5 \cdot 10^{-4}$, der Mittelwert der Fehler ist 10^{-4} .

Ein weiterer Versuch mit $u(x,y) = \sin(x) \cos(y)$ und der Differentialgleichung $\Delta u = -2u$ brachte ähnliche Ergebnisse. Der maximale Fehler war $8.8 \cdot 10^{-5}$, der zusätzliche Rechenaufwand belief sich auf 21 Sekunden, je zur Hälfte für die Berechnung der Lösung und für den Test. In der Matrix A wurde mangelnde Diagonaldominanz festgestellt.

Weitere Beispiele und Details, insbesondere zur Behandlung von Randsingularitäten, finden sich in [\[PS\]](#).

Anhang A

Implementation der Algorithmen

Die in den numerischen Beispielen benutzten Programme folgen im wesentlichen dem Algorithmus 1. Sie wurden in PASCAL für VAX/VMS entwickelt. Einige Programmteile benutzen Unterprogramme aus der NAg-Fortran-Library (Beschreibung in [NAg]). Der dort verwendete Datentyp `Double` für Fließkommazahlen wurde durchgehend beibehalten. Die Mantisse belegt 56 bit, der Exponent (zur Basis 2) 8 bit (−127 bis +127). Dies ergibt eine Maschinengenauigkeit von etwa $1.4 \cdot 10^{-17}$ und einen Wertebereich bis $1.7 \cdot 10^{38}$ — was sich manchmal als etwas beengend erwiesen hat. Die angegebenen Rechenzeiten beziehen sich auf die CPU-Zeiten der VAX 8810 (Batch-Jobs auf Queue N). Damit weitgehend komplex gerechnet werden kann, wird ein Modul `Complex` eingebunden, welches den Datentyp `Complex = RECORD re,im : Double` und die (selbsterklärenden) Funktionen, Prozeduren und Konstanten `Re`, `Im`, `AddC`, `SubC`, `MulC`, `DivC`, `NegC`, `Conj`, `AbsC`, `Arg`, `LnC`, `ExpC`, `SqrtC`, `WriteC`, `Zero`, `rl`, `il`, `Pi` bereitstellt. `Cval(x,y : Double) : Complex` erzeugt eine komplexe Zahl, `PowCn(z,n)` berechnet die ganzzahlige Potenz z^n durch Multiplikationen, `PowCr(z,r)` rechnet mit `ExpC` und `LogC`. Die Funktion `RootLogC(z,a,m)` berechnet die spezielle Ansatzfunktion $z^a(\log z)^m$ (aus Satz 35, Lehman), `RootLogDerC` ihre Ableitung.

Die Funktionen `Arg`, `LnC`, `PowCr`, `RootLogC`, `RootLogDerC` liefern für reelle Argumente stets den üblichen Hauptwert und sind außer auf der Halbgeraden $\mathbb{R}^+ \cdot e^{i \cdot \text{ArgZweig}}$ stetig. `ArgZweig` ist eine mit dem Standardwert π initialisierte Konstante. Sie kann vor dem Aufruf einer der genannten Funktionen auf einen passenden Wert gesetzt werden.

Hier einige Details zur Implementation des Algorithmus 1:

Programm Konform

Gebietsabhängiger Teil:

- **Randbeschreibung:** Die Konstante `ParNr` gibt die Zahl der positiv orientierten, stetig differenzierbaren, über $I = [-1, 1]$ parametrisierten Randkomponenten Γ_j , $\partial\Omega \equiv \Gamma_1 + \dots + \Gamma_{\text{ParNr}}$, an. Die Funktion `z(j: 1..ParNr, s: Real) : Complex` liefert den zum Parameter $s \in [-1, 1]$ gehörenden Randpunkt auf Γ_j , `dz(j, s)` die Tangentialableitung $\frac{d}{ds} z(j,s)$.
- **Ansatzfunktionen:** Die Funktion `Basis(j: Integer, z: Complex) : Complex` berechnet $\psi_j(z)$, `BasisP(j: Integer, z: Complex) : Complex` eine (beliebige) Stammfunktion $\Psi_j(z)$.
- **weitere Parameter:** Der Name des Gebiets steht in der Stringkonstanten `Gebiet`, `zeta` enthält den Punkt $\zeta \in \Omega$, an dem die Kreisabbildung normiert ist. Die ganzzahligen Konstanten `NBmin`, `NBmax` sind die Schranken der Approximationsordnung, `TestPunkte` gibt an, für wie viele Randpunkte die konforme Abbildung getestet werden soll. Die Parameter der Testpunkte $z = z(\text{par}, s)$ stehen im (initialisierten) Feld `Punkte : ARRAY[1..TestPunkte] OF RECORD par: 1..ParNr; s: Real END`. Falls die radialen Fehler an diesen Punkten kleiner sind als die Konstante `EpsKonf`, wird die Rechnung beendet.

Iteration für $n = \text{NBmin}$ bis NBmax oder bis die *Abbruchbedingung* erfüllt ist:

Gram Die Integrale für die Gramsche Matrix werden getrennt nach Real- und Imaginärteil über die `PARNR` Randstücke berechnet. Verwendet wird ein 30-Punkte-Gauß/61-Punkte-Kronrod-Verfahren mit Extrapolation (NAG-Subroutine `D01AKF`, entspricht Quadpack-Routine `QDAGS`). Falls ein zu großer Fehler vermutet wird, erfolgt eine Unterteilung des Intervalls. Der Integrand darf an den Intervallgrenzen singularär werden. Zur Kontrolle der Stabilität dient die Konditionszahl der normierten Gramschen Matrix \hat{G}_n , welche mit der NAG-Subroutine `F02XEF` (Singuläre-Werte-Zerlegung) ermittelt wird.

Orthog Die Orthonormierungsprozedur ist eine „inkrementelle“ komplexe Version von [BH]. Außerdem wird hier die Stabilitätszahl $\tilde{I}S_n^{-1}$ berechnet.

oder

LGS Zunächst erfolgt eine komplexe Cholesky-Zerlegung der Gramschen Matrix (NAG-Subroutine `F01BNF`), anschließend wird der Lösungsvektor b berechnet (NAG-Subroutine `F04AWF`).

Koeff, **Test** Hier werden die einschlägigen Formeln aus §11 angewandt. Damit man nicht notwendig Stammfunktionen mit Nullstelle ζ angeben muß, werden neben den Koeffizienten \tilde{f}_j auch noch die Zahlen $\Psi_j(\zeta)$ gespeichert.

Die *Abbruchbedingung* lautet:

- radialer Fehler bei den Testpunkten $< \text{EpsKonf}$, *oder*
- keine Verbesserung in den letzten drei Schritten erzielt, *oder*
- Kondition/Stabilitätszahl wird zu groß,
- Fehlerabbruch in **Orthog** bzw. **LGS** (etwa weil die Gramsche Matrix nicht positiv definit ist).

Je nach Genauigkeit der Integration kann eine Stabilitätszahl bis 10^{16} zulässig sein. Durch sorgfältiges Abfangen von Fehlerabbrüchen kann man auf diese Bedingung verzichten. Falls die Berechnung der \tilde{f}_j nicht schon für die Approximationsordnung NBmin an einem Fehlerabbruch scheitert, liefert das Programm als Ergebnis diejenige Approximation (d.h. die zugehörigen \tilde{f}_j und $\Psi_j(\zeta)$), die an den Testpunkten den kleinsten maximalen Fehler verursacht hat.

Die gebietsabhängigen Definitionen stehen in einer getrennten Datei, welche mit dem Präprozessor (`%Include Datei`) eingebunden wird. Sie können auch von anderen Programmen übernommen werden, welche dann unter Verwendung der ausgegebenen Daten \tilde{f}_j und $\Psi_j(\zeta)$ leicht die konforme Kreisabbildung an beliebigen Punkten des Gebiets auswerten können. Damit die Einbindung auch im lokalen *Scope* (d.h. in einer Prozedur) erfolgen kann, sollten initialisierte Variablen `Static` deklariert werden. Die Existenz von lokalen Prozeduren/Funktionen in PASCAL hat sich in diesem Zusammenhang als vorteilhaft erwiesen. Es soll aber nicht verschwiegen werden, daß etwa in C++ eine viel elegantere und lesbarere Programmierung möglich gewesen wäre.

Varianten:

1. Anstelle der (sehr robusten aber aufwendigen) NAG-Subroutine `D01AKF` zur numerischen Quadratur wurde auch ein einfaches komplexes Gauß-Verfahren mit 23 Stützstellen auf jeder Randkomponenten benutzt. Dadurch ergaben sich wesentlich niedrigere Rechenzeiten aber auch frühere Abbrüche des Verfahrens. In diesem Bereich ist das Programm optimierungsfähig. Die Auswahl des Integrationsverfahrens könnte speziell an den Integranden angepaßt werden (abhängig vom Polynomgrad und dem Verhalten der Zusatzfunktionen, bei Rand-singularitäten ggf. Umparametrisierung des Randes), was aber programmtechnisch ziemlich komplizierend wirkt.

2. Methode der Orthogonalentwicklung (nach Ellacott, § 14): Hier wird in der Gramschen Matrix eine zusätzliche Spalte angefügt, welche die Skalarprodukte zwischen den Ansatzfunktionen ψ_j und der Hilfsfunktion h enthält. Diese wird bei der Orthonormierung nicht berücksichtigt. Der gebietsabhängige Teil enthält zusätzlich die Konstante $Zshg = 1$ und die Funktion `Singul(z: Complex): Complex`, welche $g(z)$ berechnet. Die Konstante `zeta` bedeutet hier nicht das Urbild von 0 (dies wird durch g festgelegt), sondern das Urbild von 1. Der Funktionsaufruf `BasisP(0, z)` muß $\log|g(z)|$ liefern. Außerdem ist die Berechnung der Koeffizienten \tilde{f}_j von H_n bezüglich der Ψ_j und die Auswertung der Näherung F_n der Kreisabbildung geeignet anzupassen.
3. Methode der Orthogonalentwicklung zur Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete: Wie oben. Im gebietsabhängigen Teil wird $Zshg = m$ gesetzt, wenn der Rand aus m Zusammenhangskomponenten besteht. Der Aufruf von `Basis(0, z)` muß $g'(z)/g(z)$ liefern. Der Modul wird einmal über die Formel (14.6) berechnet und dann als Mittelwert aus den Testergebnissen bestimmt. Es wird ein etwas anderes Testverfahren benutzt, die Testpunkte müssen auf Γ_1 und Γ_m liegen.

Im Anhang B ist das vollständige Programm zur Konstruktion der konformen Kreisabbildung mit der MBK in der Version mit Orthonormierung abgedruckt. Als Beispiel für den gebietsabhängigen Teil dient die Einbindedatei für das L-Gebiet. Weiterhin ist die Funktion zur Berechnung der Umkehrung der Kreisabbildung angegeben — sie wird auch im Beispiel zu § 15 benutzt. Vom Programm für die Methode der Orthogonalentwicklung sind nur die sich wesentlich unterscheidenden Teile abgedruckt.

Die von JANK & TACK vorgeschlagene symbolische Variante wurde in einer einfachen Version (n fest) implementiert. Der in Anhang B abgedruckte Programmtext für ein Rechteck zeigt, wie kompakt (bis auf die leider nötige Erweiterung einiger eingebauter Funktionen) dies in MATHEMATICA (Beschreibung in [Wo]) geschehen kann. Die Koeffizienten der Näherung F_n der Kreisabbildung werden mit dem Aufruf `Koeff[n]` berechnet, die Auswertung an einem Punkt $z \in \Omega$ erfolgt mit `K[z]`. In beiden Fällen kann als zusätzliches Argument die Genauigkeit (Zahl der gültigen Dezimalstellen) der numerischen Rechnungen angegeben werden. Weiterhin kann die rein symbolisch bestimmte Gramsche Matrix und der Koeffizientenvektor der Kreisabbildung bezüglich der Ansatzfunktionen Ψ_j angezeigt werden.

Anhang B

Programmtexte

1. Das Programm zur MBK

```
( *****
*
*  Konstruktion der konformen Abbildung eines Gebiets
*  auf den Einheitskreis mit MBK / Orthonormierung
*
*  Eingabe: Gebietsbeschreibung, Ansatzfunktionen in
*           Form einer PASCAL - Einbindedatei
*  Ausgabe: U.a. Koeffizientenvektor F in der Datei
*           "<Gebiet>.KNF"
*
* ***** )

[INHERIT('Complex.pen')]
  { Komplexe Arithmetik, spezielle Singularitätenfunktionen }
  { setzt type Real = Double }

PROGRAM Konform(output); { keine Eingabe aus input }
  CONST Missing = 1e35; { "= unendlich" }
         EpsRel = 1e-14;
         EpsAbs = 1e-10; { Fehlerschranken für Integration }
         Protokoll = False; { erweiterte Ausgabe von Zwischenresultaten }
%INCLUDE 'RechtL.Pas' { Gebietsabhängige Definitionen }
  TYPE NBereich = 1..NBmax; { Nummer der Basisfunktionen }
       NBereich0 = 0..NBmax;
       ParBereich = 1..ParNr; { Kurvennummern }
       Vektor = ARRAY[NBereich] OF Complex;
       rVektor = ARRAY[NBereich] OF Real;
       Matrix = ARRAY[NBereich,NBereich] OF Complex;
  VAR k,N,Nopt : NBereich0;
       fZahl : Integer := 0; { Zahl der Funktionsauswertungen }
       Abbruch : Boolean := false; { Abbruchbedingung erfüllt }
       F,BasisP0 : Vektor;
       G,A : Matrix;
       Time0,ISn_1,Emitt,Emax,
       Emax1 : Real;
       fkonf : FILE OF Complex; { Koeffizientendatei }
%INCLUDE 'NAGLIB.H' { Headerfile für NAG-Library }

PROCEDURE Gram { berechnet Gram-Matrix der Ansatzfunktionen }
  (VAR G : Matrix; N : NBereich);
  VAR N_alt : [STATIC] NBereich0 := 0; { bereits berechnete Zeilen }
      i,j : NBereich;
FUNCTION SkalarProdukt { numerische Integration }
  (k,l : NBereich): Complex;
```

```

CONST X1 = -1.0d0; X2 = 1.0d0; { Integrationsintervall }
VAR j1      : [STATIC] ParBereich;
    gk, gl   : [STATIC] NBereich; { Static, da in [Unbound] Function benutzt }
    Fail     : Integer;
    gSum     : Complex;
    X, Y, Eps : Real;
FUNCTION Integrand(k, l: NBereich; j1: ParBereich; s : Real): Complex;
BEGIN
    Integrand := MulC( MulC( Basis(k, z(j1, s)) ,
        Conj(BasisP(l, z(j1, s))) ) , dz(j1, s)); {  $\Psi_k(z_{j1}(s)) \overline{\Psi_l(z_{j1}(s))} \dot{z}_{j1}(s)$  }
    fZahl := succ(fZahl); { Zahl der Funktionsauswertungen mitzählen }
END;
[UNBOUND] FUNCTION fr(s: Real): Real;
BEGIN fr := Re(Integrand(gk, gl, j1, s)) END;
[UNBOUND] FUNCTION fi(s: Real): Real;
BEGIN fi := Im(Integrand(gk, gl, j1, s)) END;
PROCEDURE TestFehler { eigene Fehlerbehandlung für D0IAKF }
    (Fail : Integer; Eps : Real; s : STRING);
VAR Fehler : ARRAY[1..5] OF STRING(30);
VALUE Fehler := ('Mehr Teilintervalle nötig', 'Rundungsfehler',
    'Integrand lokal unanständig', 'Extrapolation bringt nichts',
    'Integral divergiert');
BEGIN
    IF Fail > 0 THEN IF Protokoll OR odd(Fail) THEN
        writeln(' ! ', Fehler[Fail], ' bei Kurve ', j1:2, ' (', s, ' teil), ', Eps);
    END;
    BEGIN { SkalarProdukt }
        gSum := zero; gk := k; gl := l;
        FOR j1 := 1 TO ParNr DO
            BEGIN
                Fail := 1; { keine Fehlermeldung, kein Abbruch durch D0IAKF! }
                D0IAKF(fr, X1, X2, EpsAbs, EpsRel, X, Eps, { NAG-Lib }
                    D0IAKF_w, D0IAKF_lw, D0IAKF_iw, D0IAKF_liw, Fail);
                TestFehler(Fail, Eps, 'Real');
                Fail := 1;
                D0IAKF(fi, X1, X2, EpsAbs, EpsRel, Y, Eps,
                    D0IAKF_w, D0IAKF_lw, D0IAKF_iw, D0IAKF_liw, Fail);
                TestFehler(Fail, , Eps, 'Imaginär');
                gSum := AddC(gSum, Cval(X, Y));
            END;
            SkalarProdukt := DivC(gSum, MulR(i1, 2.0d0)); {  $\frac{1}{2i} f \cdot$  }
        END; { SkalarProdukt }
    BEGIN { Gram }
        FOR i := succ(N_alt) TO N DO FOR j := 1 TO i DO
            BEGIN
                IF Protokoll THEN write('Gram :: ', i:2, ', ', j:2);
                G[i, j] := SkalarProdukt(i, j); G[j, i] := Conj(G[i, j]);
                IF Protokoll THEN
                    BEGIN write(' = '); writeC(output, G[i, j], 0, -1); writeln END;
                END;
            N_alt := N;
        END; { Gram }
    FUNCTION Kondition(G: Matrix; N : NBereich): Real;
        VAR SV : rVektor;
            Fail : Integer;
            i, j : NBereich;
        BEGIN { Kondition }
            FOR i := 1 TO N DO SV[i] := Sqrt(Re(G[i, i])); { Matrix normieren }
            FOR i := 1 TO N DO FOR j := 1 TO N DO G[i, j] := MulR(G[i, j], 1.0/SV[i]/SV[j]);
            Fail := 1;

```

```

F02XEF(N, N, G, NBmax, 0, 0, 1, False, 0, 1, SV, False, 0, 1, { NAG-Lib }
    F02XEF_rwork, F02XEF_cwork, Fail);
IF Fail = 0 THEN Kondition := SV[1]/SV[N]; { größter/kleinstes singulärer Wert }
ELSE BEGIN writeln(' Kondition :: keine Konvergenz'); Kondition := -1 END;
END; { Kondition }

PROCEDURE Orthog { komplexes Orthonormierungsverfahren }
    (VAR A : Matrix; VAR ISn_1: Real;
     VAR G : Matrix; N : NBereich);
LABEL ende;
VAR i, j, k : NBereich;
    rad : Real;
    N_alt : [STATIC] NBereich0 := 0; { bisher orthonormierte Zeilen }
    C : [STATIC] Matrix; { Daten werden bei späterem Aufruf – }
    IS : [STATIC] ARRAY[NBereich] OF Real; { – wiederverwendet }
BEGIN { Orthog }
FOR i := 1 TO N_alt DO { zunächst alte Zeilen vervollständigen }
FOR j := succ(N_alt) TO N DO
BEGIN
C[i, j] := G[j, i];
FOR k := 1 TO i-1 DO C[i, j] := AddC(C[i, j], MulC(Conj(C[i, k]), C[k, j]));
END;
FOR i := succ(N_alt) TO N DO { dann Orthonormierung fortsetzen }
BEGIN
FOR j := 1 TO i-1 DO C[i, j] := MulR(C[j, i], -1d0/Re(C[j, j]));
FOR j := i TO N DO
BEGIN
C[i, j] := G[j, i];
FOR k := 1 TO i-1 DO C[i, j] := AddC(C[i, j], MulC(Conj(C[i, k]), C[k, j]));
END;
FOR j := 1 TO i-1 DO
BEGIN
rad := Re(C[j, j])/Re(C[i, i]);
IF rad >= 0.0 THEN A[j, i] := MulR(C[i, j], Sqrt(rad)) ELSE
BEGIN Abbruch := true; GOTO ende END;
END;
END;
FOR i := succ(N_alt) TO N DO
BEGIN
rad := Re(C[i, i]);
IF rad > 0.0 THEN A[i, i] := cVal(1d0/Sqrt(rad), 0d0) ELSE
BEGIN Abbruch := true; GOTO ende END;
END;
FOR i := succ(N_alt) TO N DO
BEGIN
FOR j := 1 TO i-1 DO
BEGIN
A[i, j] := zero;
FOR k := j TO i-1 DO A[i, j] := AddC(A[i, j], MulC(A[k, i], A[k, j]));
END;
END;
FOR j := succ(N_alt) TO N DO { Stabilitätszahl berechnen }
BEGIN
IS[j] := Re(G[j, j])*Sqr(Re(A[j, j]));
FOR i := 1 TO j-1 DO IS[i] := Re(G[i, i])*Sqr(AbsC(A[j, i]))+IS[i];
END;
ISn_1 := 0.0;
FOR i := 1 TO N DO ISn_1 := max(ISn_1, IS[i]);
ende: IF Abbruch THEN writeln(' Orthogonalisierung zusammengebrochen!');
N_alt := N;
END; { Orthog }

```

```

FUNCTION Konf { Konforme Abbildung auswerten, benutzt BasisP0, F und BasisP() }
    (z: Complex; N : NBereich): Complex;
    VAR sum : Complex;
        k : NBereich;
BEGIN
    sum := zero;
    FOR k := 1 TO N DO sum := AddC(sum, MulC(SubC(BasisP(k, z), BasisP0[k]), F[k]));
    Konf := sum; {  $\sum_{k=1}^N (\Psi_k(z) - \Psi_k(\zeta)) \tilde{f}_k$  }
END;

PROCEDURE Koeff { Daten für konforme Abbildung berechnen }
    (VAR BasisP0, F: Vektor; VAR A : Matrix; N : NBereich);
    VAR phi0 : Vektor;
        Faktor : Real;
        j, k : NBereich;
BEGIN { Koeff }
    FOR j := 1 TO N DO
        BEGIN
            phi0[j] := zero; F[j] := zero; BasisP0[j] := BasisP(j, zeta);
            FOR k := 1 TO j DO {  $\varphi_j(\zeta) = \sum_k a_{jk} \Psi_k(\zeta)$  }
                phi0[j] := AddC(phi0[j], MulC(A[j, k], Basis(k, zeta)));
            END;
            FOR j := 1 TO N DO {  $\sum_k a_{kj} \overline{\varphi_k(\zeta)}$  }
                FOR k := j TO N DO F[j] := AddC(F[j], MulC(Conj(phi0[k]), A[k, j]));
            Faktor := 0.0d0;
            FOR k := 1 TO N DO faktor := faktor + Sqr(AbsC(phi0[k])); {  $k_N(\zeta, \zeta)$  }
            Faktor := Sqrt(Pi/Faktor);
            FOR j := 1 TO N DO F[j] := MulR(F[j], Faktor); {  $\tilde{f}_j$  }
        END; { Koeff }
END;

PROCEDURE Test { Testet die Näherung für vorgegebene Testpunkte }
    (VAR Emitt, Emax: Real; N : NBereich);
    VAR r : Real;
        k : 1..TestPunkte;
BEGIN
    Emitt := 0.0d0; Emax := 0.0d0;
    FOR k := 1 TO TestPunkte DO
        BEGIN
            WITH Punkte[k] DO r := AbsC(Konf(z(par, s), N));
            IF Protokoll THEN writeln('T', k:1, ' : ', r);
            r := abs(r-1d0);
            Emitt := Emitt + r; Emax := max(Emax, r);
        END;
    Emitt := Emitt/TestPunkte;
END;

BEGIN (* H A U P T P R O G R A M M *)
    Pi := X01AAF; Time0 := X05BAF; { NAG-Lib }
    writeln('Gebiet : ', Gebiet);
    write('Urbild von 0 : '); writeC(output, zeta, 13, -1); writeln;
    N := pred(NBmin); Nopt := 0;
    Emax1 := Missing;
    REPEAT
        N := succ(N);
        writeln('Approximationsordnung : ', N:2);
        Gram(G, N);
        write('Kondition : ', Kondition(G, N):10);
        Orthog(A, ISn_1, G, N);
        IF NOT Abbruch THEN { Orthog korrekt beendet? }
            BEGIN
                writeln('Stabilitätszahl: ', ISn_1:10);
                Koeff(BasisP0, F, A, N);
                Test(Emitt, Emax, N);
            END;
    UNTIL Abbruch;

```

```

writeln('Fehler max/mittel : ', Emax, Emitt);
writeln(fZahl DIV 2, ' Integrale; CPU-Zeit : ', X05BAF-Time0:7:2);
IF Emax < Emax1 THEN BEGIN Emax1 := Emax; Nopt := N; END; { Verbesserung! }
END;
Abbruch := Abbruch
      OR (Nopt = N-3) { keine Verbesserung in drei Schritten }
      OR (N = NBmax); { maximale Appr.Ordnung erreicht }
UNTIL Abbruch OR (Emax < EpsKonf); { Zielgenauigkeit erreicht }
{***** Ergebnis: beste Approximation ausgeben *****}
IF Nopt > 0 THEN { gültiges Ergebnis }
BEGIN
  writeln(' Optimale Approximationsordnung : ', Nopt:2);
  Koeff(BasisPO, F, A, Nopt);
  IF EpsKonf < Emax1 THEN writeln(' Zielgenauigkeit nicht erreicht. ');
  IF Protokoll THEN
  BEGIN
    FOR k := 1 To Nopt DO
      BEGIN write(' F', k:1, ' = '); writeC(output, F[k], 13, -1); writeln; END;
    END;
    open(fkonf, '[.]'+Gebiet+'.knf', new); rewrite(fkonf);
    FOR k := 1 To Nopt DO write(fkonf, F[k], BasisPO[k]);
    close(fkonf); { Ausgabe der Koeffizienten }
  END ELSE writeln(' Keine Näherung berechnet. ');
END.

```

2. Gebietsabhängiger Teil für's L-Gebiet:

```

CONST Gebiet      = 'RechtL';
        ParNr       = 6; { Rand besteht aus 6 Strecken }
        NBmin       = 7; { minimale, }
        NBmax       = 35; { maximale Zahl von Ansatzfunktionen }
        EpsKonf     = 1e-8; { Zielgenauigkeit }
        TestPunkte  = 6;
VAR    InEck       : [STATIC] Complex; { Verzweigungssingularität }
        Wurzel      : [STATIC] ARRAY[1..4] OF Real; { Exponenten }
        Pol         : [STATIC] ARRAY[1..2] OF Complex; { Polstellen }
        Punkte      : [STATIC] ARRAY[1..TestPunkte] OF
                      RECORD par : Integer; s : Real END;
        zeta        : [STATIC] Complex; { Urbild von 0 }
VALUE Punkte      := ((1, -1.0), (1, 0.0), (1, 1.0), (2, 1.0), (5, 0.0), (5, 1.0));
        InEck       := (1.0d0, 1.0d0);
        Wurzel      := (-1d0/3d0, 1d0/3d0, 5d0/3d0, 7d0/3d0);
        Pol         := ((2.0d0, 0.0d0), (0.0d0, 2.0d0));
        zeta        := (0.0d0, 0.0d0);

```

FUNCTION Basis(j : Integer; w : Complex): Complex;

VAR p : Complex; { Basisfunktionen $\psi_j(w)$ }

BEGIN

CASE j OF

1..4: { Verzweigungssingularität, $(z - 1 - i)^{\text{Wurzel}[j]}$ }

BEGIN

ArgZweig := pi/4.0; { Unstetigkeitsstrahl außen }

Basis := PowCr(SubC(w, InEck), Wurzel[j]);

END;

5..6: { Polsingularitäten bei -2 und $-2i$ }

BEGIN

p := AddC(Pol[j-4], w); p := MulC(p, p);

Basis := DivC(Pol[j-4], p);

END;


```

7..NBmax : Basis := PowCn(w,j-7); { Monome }
END;
END;
FUNCTION BasisP(j : Integer; w : Complex): Complex;
BEGIN
    { Stammfunktionen  $\Psi_j(w)$  }
    CASE j OF
    1..4:
    BEGIN
        ArgZweig := pi/4.0;
        BasisP := MulR(PowCr(SubC(w, InEck), Wurzel[j]+1.0d0),
            1.0d0/(Wurzel[j]+1.0d0));
    END;
    5..6: BasisP := DivC(w, AddC(w, Pol[j-4]));
    7..NBmax: BasisP := MulR(PowCn(w, j-6), 1.0d0/(Dble(j)-6d0));
    END;
END;
FUNCTION z(j1 : Integer; s : Real): Complex; { Rand }
BEGIN
    CASE j1 OF
    1: z := cVal(3.0d0, s);
    2: z := cVal(2.0d0-s, 1.0d0);
    3: z := cVal(1.0d0, s+2.0d0);
    4: z := cVal(-s, 3.0d0);
    5: z := cVal(-1.0d0, 1.0d0-2.0d0*s);
    6: z := cVal(1.0d0+2.0d0*s, -1.0d0);
    END;
END;
FUNCTION dz(j1 : Integer; s : Real): Complex; { dz(s)/ds }
BEGIN
    CASE j1 OF
    1: dz := cVal(0.0d0, 1.0d0);
    2: dz := cVal(-1.0d0, 0.0d0);
    3: dz := cVal(0.0d0, 1.0d0);
    4: dz := cVal(-1.0d0, 0.0d0);
    5: dz := cVal(0.0d0, -2.0d0);
    6: dz := cVal(2.0d0, 0.0d0);
    END;
END;

```

3. Umkehrabbildung: Die Daten F , $BasisP0$, NB (optimale Approximationsordnung) seien bereits eingelesen, $Konf()$ sei wie oben definiert. Der Startwert für das Newtonverfahren wird von der Prozedur `Inv` geliefert, welche das reverse Polynom auswertet. Das zugehörige FORTRAN-Programmstück wird im wesentlichen von MATHEMATICA erzeugt. Alternativ könnte der Startwert auch aus einer vorher berechneten Wertetabelle entnommen werden.

```

FUNCTION Konf1 {  $F'(z)$  } (z: Complex): Complex;
VAR zm : Complex; k : Integer;
BEGIN
    zm := zero;
    FOR k := 1 TO NB DO zm := AddC(MulC(Basis(k, z), F[k]), zm);
    Konf1 := zm;
END;
FUNCTION KonfInv { berechnet  $F^{-1}$  } (z : Complex): Complex;

```

```

CONST NmaxIt = 10;
      Nresid  = 1d-10;
VAR    z0, z1, z2 : Complex;
      k          : Integer;
      r, r1      : Real;
PROCEDURE Inv(VAR y, x : Complex); FORTRAN; { reverses Polynom }
BEGIN
  Inv(z0,z);
  IF Re(z0) < Missing THEN
  BEGIN
    z1 := SubC(Konf(z0,NB), z); k := 0;
    REPEAT
      z2 := Konf1(z0); { Newton:  $z_0 := z_0 - \frac{F(z_0)-z}{F'(z_0)}$  }
      r1 := AbsC(z2);
      IF r1 > 1e-30 THEN z0 := SubC(z0, DivC(z1, z2));
      z1 := SubC(Konf(z0,NB), z); r := AbsC(z1); k := succ(k);
    UNTIL (r < Nresid) OR (k > NmaxIt) OR (r1 <= 1e-30);
  END;
  IF NOT r < Nresid THEN IF Protokoll THEN
  BEGIN
    write(' *** Newton Fehler bei '); writeC(output, z0, 12, -1); writeln;
  END;
  KonfInv := z0;
END;

```

4. Methode der Orthogonalentwicklung:

```

FUNCTION Konf { Auswertung der konformen Abbildung }
      (z: Complex; N: NBereich): Complex;
  VAR Sum : Complex; k: NBereich;
  BEGIN
    Sum := zero; {  $F(z) = \frac{g(z)}{g(\zeta)} \exp(H(z))$  }
    FOR k := 1 To N DO
      Sum := AddC(MulC(SubC(BasisP(k, z), BasisP0[k]), F[k]), Sum);
      Konf := MulC(ExpC(Sum), DivC(Singul(z), Singul(zeta)));
    END;
PROCEDURE Koeff { Daten der konformen Abbildung berechnen }
      (VAR BasisP0, F: Vektor; VAR Modul: Real;
      VAR A, G: Matrix; N: NBereich);
  VAR F1 : Vektor;
      j, k : NBereich;
      HN : Real;
  BEGIN { Koeff }
    FOR j := 1 To N DO
      BEGIN
        BasisP0[j] := BasisP(j, zeta);
        F1[j] := zero;
        FOR k := 1 To j DO {  $\langle H, \psi_k \rangle = -2\overline{G[k, 0]}$  }
          F1[j] := AddC(F1[j], MulC(MulR(Conj(G[k, 0]), -2.0d0), Conj(A[j, k])));
        END;
      FOR j := 1 To N DO
        BEGIN
          F[j] := zero;
          FOR k := j To N DO F[j] := AddC(F[j], MulC(F1[k], A[k, j]));
        END;
      END;
  END;

```

```

IF Zshg > 1 THEN { Modul berechnen }
BEGIN
  HN := 0.0d0; { ||hn||2 }
  FOR j := 1 To N DO HN := HN+sqr(AbsC(f1[j]));
  Modul := exp((Re(G[0,0])-HN/2.0d0)/Pi);
END ELSE Modul := 0.0;
END; { Koeff }

```

5. Symbolische Variante der MBK, MATHEMATICA-Programm.

```

BeginPackage["Rechteck4`"]
zeta = 0;
z = {4 + I s, I - 4 s, - 4 - I s, - I + 4 s};
Psi[w_,j_] := (w)^(2 j-1)
psi[w_,j_] := Release[ D[Psi[w,j],w] ]
EndPackage[]

```

```

BeginPackage["Kreisabb`", "Rechteck4`"]
Koeff::usage="Koeff[n,Stellen:30] erzeugt konforme Kreisabbildung,
Approximationsordnung /n/,
Rechnung mit /Stellen/ Dezimalstellen."
K::usage = "K[z,Stellen:30] berechnet Kreisabbildung bei /z/, Rechnung
mit /Stellen/ Dezimalstellen."
nB::usage = "nB liefert aktuelle Zahl der Basisfunktionen."
G::usage = "G liefert Gramsche Matrix."
ft::usage = "ft liefert Koeffizientenvektor bzgl. Psi."

```

```

Begin["`Private`"]
Unprotect[Conjugate,Power];
Conjugate[x_+y_] := Conjugate[x]+Conjugate[y]
Conjugate[x_ y_] := Conjugate[x] Conjugate[y]
Conjugate[x_ ^ r_] := Conjugate[x] ^ r
Conjugate[s] := s
Conjugate[Sin[s]]:= Sin[s]
Conjugate[Cos[s]] := Cos[s]
Power[0,0]=1
Protect[Conjugate,Power]

nB = 0;
dz = D[#,s]& /@ z;
Gram[i_, j_] := Block[ {il},
il = Map[Integrate[psi[z[[#]],i] Conjugate[Psi[z[[#]],j]] (dz[[#]]),
{s,-1,1}]& , Range[Length[z]] ];
Plus[il /. {x___} :> x] / (2 I)
]

```

```

Koeff[n_Integer, Stellen_Integer:30] := Block[ {faktor},
G = Table[ If [i<j, 0, Gram[i,j]], {i,n},{j,n}];
G = G + Conjugate[Transpose[G]];
Do[ G[[i]] = G[[i]] / 2, {i,n}];
ft = N[ LinearSolve[G, Table[psi[zeta,i], {i,n}] ], Stellen];
faktor = Sqrt[Pi / Sum[ft[[i]] psi[zeta,i], {i,n}]];
ft = faktor * ft;
nB = n;
]

```

```
K[w_, Stellen_Integer:30] :=  
  N[ Sum[ ft[[i]] * (Psi[w,i]-Psi[zeta,i]), {i,nB}], Stellen]  
  
End[]  
EndPackage[]  
Null
```

Bezeichnungen

$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega, W)$	Raum der Abbildungen W^Ω mit linearer und topologischer Produktstruktur.
$e_x, \Omega' = \{e_x, x \in \Omega\}$	in einem Funktionenraum: „Einsetzungsfunktionale“ $f \mapsto f(x)$ an einer Stelle x des Definitionsbereichs Ω
FmsE	Funktionenraum mit stetigen Einsetzungsfunktionalen
HmrK	Hilbertraum mit reproduzierendem Kern
$\kappa(x) = \ e_x\ ^2$	„Schrankenfunktion“ im normierten FmsE
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	duales Raumpaar, Bilinearform, bzw. Skalarprodukt in einem HmrK
$K_x, k(x, y) = K_x(y)$	reproduzierendes Element bei x und Kernfunktion in einem HmrK
A^*	adjungierter Operator zu A, \bar{A}^T bei Matrizen
$L^p(\Omega)$	Raum der über Ω p -integrierbaren Funktionen
$\mathcal{L}^p(\Omega)$	Raum ihrer Äquivalenzklassen bzgl. Gleichheit fast überall.
$L_B^2(\Omega)$	Raum der holomorphen, quadratintegrierbaren Funktionen
L_S^2	Raum der holomorphen Funktionen mit L^2 -Randwerten
$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	die ergänzte komplexe Ebene
$ M $	Flächeninhalt der Menge M , bzw. Länge der Kurve M
$\text{cap}(A), R_\zeta(\Omega)$	Kapazität eines Kompaktums A , konformer Radius eines Gebiets Ω .
Γ_r	äußere Niveaulinie eines Kompaktums Γ , speziell einer Jordankurve (Kap. 10)
$\text{Int}\gamma, \text{Ext}\gamma$	Inneres, Äußeres einer Jordankurve γ
$\eta_n(z) = z^{n-1}, \rho_n(z)$	Monome und durch ihre Orthonormierung entstehende Orthonormalpolynome
$C_\alpha(M), C_\alpha^p(M)$	Raum der Funktionen, die (bzw. deren p -te Ableitungen) auf M einer Hölderbedingung $ f(x) - f(y) < C \cdot \ x - y\ ^\alpha$ der Ordnung $0 < \alpha \leq 1$ genügen.
$O(\{a_n\})$	Menge aller reellen Folgen $\{x_n\}$, für die x_n/a_n beschränkt ist
MBK	Methode der Bergmanschen Kernfunktion zur Approximation der konformen Kreisabbildung (Kap. 11)
$I_{nj}, IS_n, \tilde{I}_{nj}, \tilde{IS}_n$	Stabilitätsindikatoren aus [PW] (Kap. 11)

Literaturverzeichnis

- [Ah] Ahlfors, *Quasiconformal Reflection*, Acta Mathematica **109** (1963), 291–301.
- [Ar] N. Aronszajn, *Theory of Reproducing Kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.
- [BS] Behnke, Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (Grundlehren der math. Wissenschaften **77**), Springer-Verlag, Berlin ... 1972.
- [Bm] Stefan Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping*, Math. Surveys **5**, New York 1950.
- [BH] Stefan Bergman & J.G. Herriot, *Applic. of the Method of the Kernel Function for Solving Bdry. Val. Problems*, Numer. Math. **3** (1961), 209–225.
- [Ch] Chalmers, *Subspace Kernels and Minimum Problems in Hilbert Spaces with Kernel Function*, Pacific J. of Mathematics **31** (1970), 620–628.
- [El] S. W. Ellacott, *On the Convergence of some Approximation Methods of Conformal Mappings*, IMA J. Num. Anal. **1** (1981), 185–192.
- [Fa] Faraut, Koranyi, *Function Spaces and Reprod. Kernels on Bounded Sym. Domains*, J. of Functional Analysis **88** (1990), 64–89.
- [Fe] C. Fefferman, *The Bergman Kernel and Biholom. Mapp. of Pseudoconvex Domains*, Inv. Math. **26** (1974), 1–65.
- [Fi] G. Fichera, *Sulla "Kernel Function"*, Boll. Un. Mat. Ital. ser. iii, **7** (1952), 4–15.
- [Ga1] Dieter Gaier, *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung* (Springer Tracts in Nat. Phil., vol. **3**), Springer-Verlag, Berlin ... 1964.
- [Ga2] Dieter Gaier, *Vorlesungen über Approximation im Komplexen*, Birkhäuser Verlag 1980.
- [Ga3] Dieter Gaier, *On the Convergence of the Bieberbach Polynomials in Regions with Corners*, Constr. Approx. **4** (1988), 289–305.
- [Go] Gennadij Michailowitsch Golusin, *Geometrische Funktionentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957.
- [JaTa] Gerhard Jank & Lutz H. Tack, *Conformal Mapping using Bergman's Method and the MAPLE System*, acm-sigsam Bulletin vol. **25**, Nr. 2 (1991), 18–23.
- [KPS] Kokkinos, Papamichael, Sideridis, *An Orthon. Method for the Approx. Conformal Mapping of Multiply Connected Domains*, IMA J. of Num. Analysis vol. **10** Nr. 3 (1990), 343–360.
- [La] F. M. Larkin, *Optimal Approximation in Hilbert Spaces with Reprod. Kernel Function*, Math. of Computation **24**, Nr. 112 (1970), 911–921.
- [Le] R. Sherman Lehman, *Development of the Mapping Function at an Analytic Corner*, Pacific Journal of Mathematics **7** (1957), 1437–1449.

- [L11] Frank David Lesley, *On the Interior and Exterior Conformal Mappings of the Disk*, J. London Math. Soc. (2) **20** (1979), 67–78.
- [L12] Franc David Lesley, *Conf. Mappings of Domains Satisfying a Wedge Condition*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. **93** Nr. 3 (1985), 483–488.
- [Me] Herbert Meschkowski, *Hilbertsche Räume mit Kernfunktion* (Grundlehren der math. Wissenschaften Bd. **113**), Springer-Verlag 1962.
- [NAg] Numerical Algorithms Group, *Fortran Library Manual* Mark 14, Nag 1990.
- [NW] M.Z. Nashed & Grace Wahba, *Convergence Rates of Approximate Least Squares Solution of Linear Integral and Operator Equations of the First Kind*, Mathematics of Computation **28**, Nr. 125 (1974), 69–80.
- [PS] N. Papamichael & A. Sideridis, *The Use of Conformal Transformations for the Num. Solution of Ellipt. Boundary Value Problems with Boundary Singularities*, J. Inst. Maths Applies **23** (1979), 73–88.
- [PW] N. Papamichael & Warby, *Stability and Convergence Properties of the Bergman Kernel Method*, Numerische Mathematik **48** (1986), 639–669.
- [Sh] Harold Shapiro, *Topics in Approximation Theory*, Lecture Notes vol. **187**, Springer-Verlag 1970.
- [Su] P.K. Suetin, *Areally Orthogonal Polynomials and Bieberbach Polynomials* (Übersetzung), Sov. Math. Dokl. **10** (1969), 1123–1126.
- [Wa] J. L. Walsh, *The Convergence of Sequences of Rational Functions of Best Approximation*, Math. Annalen **155** (1964), 252–264.
- [Wo] Stephen Wolfram, *Mathematica*, Wolfram Reserach, Addison Wesley 1991.

Erklärung

nach §24 (2) der Diplom-Prüfungsordnung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfaßt habe. Die verwendeten Quellen und Hilfsmittel sind in der Arbeit und im Literaturverzeichnis vollständig aufgeführt.

Würzburg, den 1. 10. 1991

(Gerhard Döppert)